平成 26 年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

1 原点を中心とする半径 1 の円を C とし，x 軸上に点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ をとる．ただし $a > 1$ とする．P から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする．

(1) Q の x 座標を求めよ．

(2) 点 R が C 上にあるとき，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}$ が R によらず一定であることを示し，その値を a を用いて表せ．

(3) C 上の点 R が $\angle\mathrm{PRQ} = 90^\circ$ をみたすとする．このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ．

2 大小合わせて 2 個のサイコロがある．サイコロを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする．

(1) 2 個のサイコロを同時に投げる．出た目の差の絶対値について，その期待値を求めよ．

(2) 2 個のサイコロを同時に投げ，出た目が異なるときはそこで終了する．出た目が同じときには小さいサイコロをもう一度だけ投げて終了する．終了時に出ている目の差の絶対値について，その期待値を求めよ．

3 実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．

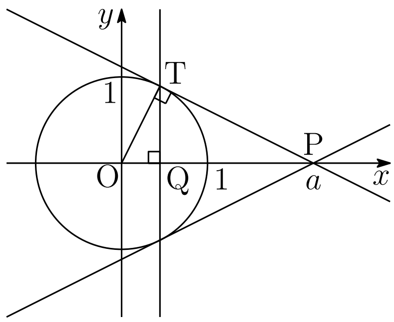
(1) 2 点 P，Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) a は定数とし，直線 $x = a$ と ℓ の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ．

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

解答例

1 (1) 右の図において



$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OT}} = \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OP}}$$

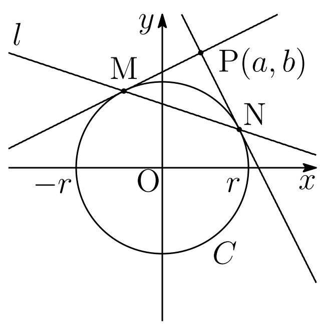
したがって，点 Q の x 座標は

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{a} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{a}}$$

補足 点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線の方程式は

$$ax + 0y = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{a}$$

円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線



$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の 2 式から直線 $l : ax + by = r^2$ は 2 点 M，N を通る．
このとき，l を P を極とする C の極線という．

(2) $\mathrm{R}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると，$\mathrm{P}(a,\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$ より

$$\frac{\mathrm{PR}^2}{\mathrm{QR}^2} = \frac{(a-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}{\left(\frac{1}{a} - \cos\theta\right)^2 + \sin^2\theta} = \frac{a^2 - 2a\cos\theta + 1}{\frac{1}{a^2} - \frac{2\cos\theta}{a} + 1} = a^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}} = a}$$

(3) (2) の結果から　$\mathrm{QR} = \dfrac{\mathrm{PR}}{a}$

$\angle\mathrm{PRQ} = 90^\circ$ より，$\mathrm{PR}^2 + \mathrm{QR}^2 = \mathrm{PQ}^2$ であるから

$$\mathrm{PR}^2 + \frac{\mathrm{PR}^2}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{PR}^2 = \frac{(a^2-1)^2}{a^2+1}$$

$a > 1$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{PR} = \dfrac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}}$ ■

2 (1) 大小2個のサイコロの出た目をそれぞれ j，k とし，期待値を E_1 とすると

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{6^2}\sum_{1\leqq j,k\leqq 6}|j-k| = \frac{1}{36}\sum_{1\leqq j<k\leqq 6}|j-k| + \frac{1}{36}\sum_{1\leqq k<j\leqq 6}|j-k| \\
&= \frac{1}{36}\sum_{1\leqq j<k\leqq 6}(k-j) + \frac{1}{36}\sum_{1\leqq k<j\leqq 6}(j-k) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{1\leqq j<k\leqq 6}(k-j) + \frac{1}{36}\sum_{1\leqq j<k\leqq 6}(k-j) \\
&= \frac{1}{18}\sum_{1\leqq j<k\leqq 6}(k-j) = \frac{1}{18}\sum_{k=2}^{6}\sum_{j=1}^{k-1}(k-j) \\
&= \frac{1}{18}\sum_{k=2}^{6}\left\{k(k-1)-\frac{1}{2}(k-1)k\right\} = \frac{1}{36}\sum_{k=2}^{6}(k-1)k \\
&= \frac{1}{108}\sum_{k=2}^{6}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\} \\
&= \frac{5{\cdot}6{\cdot}7}{108} = \mathbf{\frac{35}{18}}
\end{aligned}$$

別解 $|j-k|$ の値は，右の表のようになる．
したがって，求める期待値 E_1 は

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1{\cdot}10+2{\cdot}8+3{\cdot}6+4{\cdot}4+5{\cdot}2}{6^2} \\
&= \frac{70}{36} = \mathbf{\frac{35}{18}}
\end{aligned}$$

j \ k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

(2) 出た目が異なるときの期待値は　E_1

出た目が同じときには，その期待値は　$\frac{1}{6}E_1$

よって，求める期待値を E_2 とすると

$$E_2 = E_1 + \frac{1}{6}E_1 = \frac{7}{6}E_1 = \frac{7}{6}{\cdot}\frac{35}{18} = \mathbf{\frac{245}{108}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=(2t+1)x-t^2-t}$$

(2) 直線 $x=a$ と ℓ の交点の y 座標が $f(t)$ であるから

$$\begin{aligned} f(t)&=(2t+1)a-t^2-t=-t^2+(2a-1)t+a \\ &=-\left(t-a+\frac{1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

したがって，$-1\leqq t\leqq 0$ のとき，$f(t)$ の最大値は

(i) $a-\dfrac{1}{2}<-1$，すなわち，$a<-\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(-1)=-a$

(ii) $-1\leqq a-\dfrac{1}{2}\leqq 0$，すなわち，$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$f\left(a-\frac{1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$$

(iii) $0<a-\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\dfrac{1}{2}<a$ のとき，$f(0)=a$

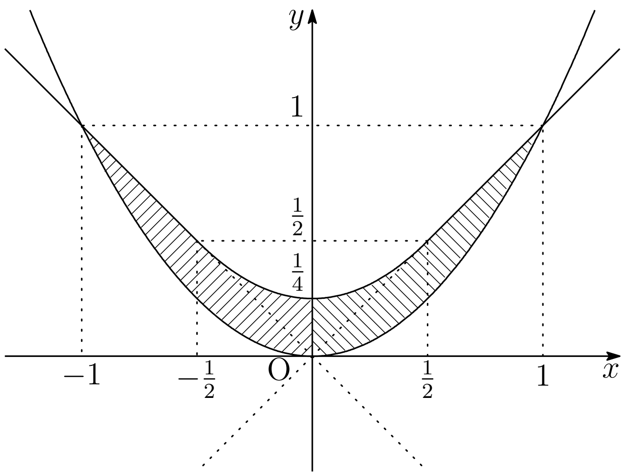
(i)〜(iii) から，求める最大値を $M(a)$ とすると

$$\boldsymbol{M(a)=\begin{cases} -a & \left(a<-\frac{1}{2}\right) \\ a^2+\frac{1}{4} & \left(-\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{1}{2}\right) \\ a & \left(\frac{1}{2}<a\right) \end{cases}}$$

(3) 線分 PQ は放物線 $y = x^2$ の上側にあるから，(2) の結果より，求める図形の領域は

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq M(x) \end{cases}$$

よって，下の図の斜線部分で，境界線を含む.



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^1 (x - x^2)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - x\right\} dx \\ &= \int_0^1 x(1-x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} + \left[\ \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\ \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \frac{5}{12}}$

補足 $y = x^2 + \dfrac{1}{4}$ は直線 PQ の包絡線．理系 $\boxed{2}$ を参照. ■