

平成 25 年度 名古屋大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 3 人でジャンケンをする. 各人はグー, チョキ, パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする. 負けた人は脱落し, 残った人で次回のジャンケンを行い (アイコの場合は誰も脱落しない), 勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける. このとき各回の試行は独立とする. 3 人でジャンケンを始め, ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n , 3 人が残っている確率を q_n とおく.

- (1) p_1, q_1 を求めよ.
- (2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き, p_n, q_n の一般項を求めよ.
- (3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ.

2 平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり, C_1 の周上に定点 A がある. 点 P, Q はそれぞれ C_1, C_2 の周上を反時計回りに動き, ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む. 時刻 $t = 0$ において, P は A の位置にあって O, P, Q はこの順に同一直線上に並んでいる. $0 \leq t \leq 4\pi$ のとき $\triangle APQ$ の面積の 2 乗の最大値を求めよ.

3 k, m, n は整数とし, $n \geq 1$ とする. ${}_m C_k$ を二項係数として, $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める.

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots$$

$$+ {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ.
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ.
- (3) p が 7 以上の素数のとき, $S_1(p-1), S_2(p-1), S_3(p-1), S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ.

解答例

- 1 (1) 1回のジャンケンで負ける1人の選び方は3通り、その負け方は3通り.
1回のジャンケンで1人だけが負ける、すなわち、2人が残る確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

1回のジャンケンでアイコになるのは、3人とも違う手を出す場合の $3!$ 通りと3人とも同じ手を出す場合の3通りがある. 1回のジャンケンで3人が残っている確率 q_1 は

$$q_1 = \frac{3! + 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

- (2) $n+1$ 回目に2人が残っているのは、 n 回目に2人が残っていて $n+1$ 回目でアイコになる場合、 n 回目に3人が残っていて $n+1$ 回目で1人脱落する場合であるから

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{3}{3^2} + q_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$n+1$ 回目に3人が残っているのは、 n 回目に3人が残っていて $n+1$ 回目でアイコになる場合であるから

$$q_{n+1} = q_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}q_n$$

よって、求める漸化式は

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n$$

$\{q_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから $q_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$

これを漸化式に代入すると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{ゆえに} \quad 3^{n+1}p_{n+1} - 3^n p_n = 1$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (3^{k+1}p_{k+1} - 3^k p_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

ゆえに $3^n p_n - 3p_1 = n - 1$ したがって $p_n = \frac{n}{3^n}$

$n = 1$ のときも上式は成立する.

よって、求める一般項は $p_n = \frac{n}{3^n}, \quad q_n = \frac{1}{3^n}$

- (3) n 回目 ($n \geq 2$) で1人の勝ち残りが決まるのは、 $n-1$ 回目に2人が残っていて n 回目で1人が脱落する場合 (脱落する1人の選び方が2通りで、その負け方が3通り)、 $n-1$ 回目に3人が残っていて n 回目で2人脱落する場合 (勝者1人の選び方が3通りで、その勝ち方が3通り) であるから

$$p_{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3^2} + q_{n-1} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \frac{n-1}{3^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2n-1}{3^n}$$

上式は、 $n=1$ のときも成立するから、求める確率は $\frac{2n-1}{3^n}$ ■

- 2 (1) $A(1, 0)$, $P(\cos t, \sin t)$, $Q\left(2 \cos \frac{t}{2}, 2 \sin \frac{t}{2}\right)$ とおくと ($0 \leq t \leq 4\pi$)

$$\overrightarrow{AP} = (\cos t - 1, \sin t) = 2 \sin \frac{t}{2} \left(-\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AQ} = \left(2 \cos \frac{t}{2} - 1, 2 \sin \frac{t}{2} \right)$$

$\triangle APQ$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| \left| -\sin \frac{t}{2} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \left(2 \cos \frac{t}{2} - 1 \right) \right| \\ &= \left| \sin \frac{t}{2} \right| \left(2 - \cos \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

$x = \cos \frac{t}{2}$, $f(x) = S^2$ とおくと

$$f(x) = (1 - x^2)(2 - x)^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$f'(x) = 2(2 - x)(2x^2 - 2x - 1)$$

$-1 \leq x \leq 1$ に注意して、 $f'(x) = 0$ を解くと $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

x	-1	...	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

$a = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ とおくと、 $2a^2 - 2a - 1 = 0$ より $a^2 = a + \frac{1}{2}$

$$f(a) = (1 - a^2)(2 - a)^2 = (1 - a^2)(4 - 4a + a^2)$$

$$= \left(1 - a - \frac{1}{2} \right) \left(4 - 4a + a + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{9}{2} - 3a \right)$$

$$= 3a^2 - 6a + \frac{9}{4} = 3 \left(a + \frac{1}{2} \right) - 6a + \frac{9}{4} = -3a + \frac{15}{4} = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4}$$

よって、求める最大値は $\frac{9 + 6\sqrt{3}}{4}$ ■

3 (1) $S_k(1) = 1^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(1) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k - ({}_m C_0 + {}_m C_m) = \mathbf{2^m - 2} \end{aligned}$$

$S_k(2) = 1^k + 2^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(2) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(2) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (1^k + 2^k) \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k (1 + 2^k) - \{ {}_m C_0 (1 + 2^0) + {}_m C_m (1 + 2^m) \} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k + \sum_{k=0}^m {}_m C_k 2^k - (3 + 2^m) \\ &= 2^m + (2 + 1)^m - (3 + 2^m) = \mathbf{3^m - 3} \end{aligned}$$

(2) $S_k(n) = \sum_{j=1}^n j^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(n) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) = \sum_{k=0}^m {}_m C_k S_k(n) - S_0(n) - S_m(n) \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k \sum_{j=1}^n j^k - n - \sum_{j=1}^n j^m \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m {}_m C_k j^k - n - \sum_{j=1}^n j^m \\ &= \sum_{j=1}^n (j+1)^m - n - \sum_{j=1}^n j^m = \sum_{j=1}^n \{(j+1)^m - j^m\} - n \\ &= \{(n+1)^m - 1^m\} - n = \mathbf{(n+1)^m - (n+1)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果に $n = p - 1$ を代入すると

$$T_m(p-1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(p-1) = p^m - p \quad \cdots (*)$$

(*) に $m = 2, 3, 4, 5$ を代入すると

$$2S_1(p-1) = p^2 - p$$

$$3S_1(p-1) + 3S_2(p-1) = p^3 - p$$

$$4S_1(p-1) + 6S_2(p-1) + 4S_3(p-1) = p^4 - p$$

$$5S_1(p-1) + 10S_2(p-1) + 10S_3(p-1) + 5S_4(p-1) = p^5 - p$$

これらは法 p について

$$(*) \begin{cases} 2S_1(p-1) \equiv 0 \\ 3S_1(p-1) + 3S_2(p-1) \equiv 0 \\ 4S_1(p-1) + 6S_2(p-1) + 4S_3(p-1) \equiv 0 \\ 5S_1(p-1) + 10S_2(p-1) + 10S_3(p-1) + 5S_4(p-1) \equiv 0 \end{cases}$$

p は 7 以上の素数であるから, (*) の第 1 式から

$$S_1(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

これを (*) の第 2 式に代入すると

$$3S_2(p-1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_2(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

上の結果を (*) の第 3 式に代入すると

$$4S_3(p-1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_3(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

これらの結果を (*) の第 4 式に代入すると

$$5S_4(p-1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_4(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

よって, $S_1(p-1), S_2(p-1), S_3(p-1), S_4(p-1)$ は p の倍数である. ■