平成 25 年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

1 3 人でジャンケンをする．各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする．負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い (アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける．このとき各回の試行は独立とする．3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく．

(1) p_1，q_1 を求めよ．

(2) p_n，q_n がみたす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ．

(3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ．

2 平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり，C_1 の周上に定点 A がある．点 P，Q はそれぞれ C_1，C_2 の周上を反時計回りに動き，ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む．時刻 $t=0$ において，P は A の位置にあって O，P，Q はこの順に同一直線上に並んでいる．$0 \leqq t \leqq 4\pi$ のとき △APQ の面積の 2 乗の最大値を求めよ．

3 k，m，n は整数とし，$n \geqq 1$ とする．${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める．

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geqq 0)$$
$$T_m(n) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots$$
$$+ {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n) \quad (m \geqq 2)$$

(1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ．

(2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ．

(3) p が 7 以上の素数のとき，$S_1(p-1)$，$S_2(p-1)$，$S_3(p-1)$，$S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 1 回のジャンケンで負ける 1 人の選び方は 3 通り，その負け方は 3 通り．
1 回のジャンケンで 1 人だけが負ける，すなわち，2 人が残る確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

1 回のジャンケンでアイコになるのは，3 人とも違う手を出す場合の 3! 通りと 3 人とも同じ手を出す場合の 3 通りがある．1 回のジャンケンで 3 人が残っている確率 q_1 は

$$q_1 = \frac{3! + 3}{3^3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) $n+1$ 回目に 2 人が残っているのは，n 回目に 2 人が残っていて $n+1$ 回目でアイコになる場合，n 回目に 3 人が残っていて $n+1$ 回目で 1 人脱落する場合であるから

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{3}{3^2} + q_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$n+1$ 回目に 3 人が残っているのは，n 回目に 3 人が残っていて $n+1$ 回目でアイコになる場合であるから

$$q_{n+1} = q_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}q_n$$

よって，求める漸化式は

$$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n}$$

$\{q_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから　$q_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$

これを漸化式に代入すると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{ゆえに} \quad 3^{n+1}p_{n+1} - 3^n p_n = 1$$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(3^{k+1}p_{k+1} - 3^k p_k) = \sum_{k=1}^{n-1}$

ゆえに　$3^n p_n - 3p_1 = n - 1$　したがって　$p_n = \frac{n}{3^n}$

$n = 1$ のときも上式は成立する．

よって，求める一般項は　$\boldsymbol{p_n = \frac{n}{3^n}, \quad q_n = \frac{1}{3^n}}$

(3) n 回目 $(n \geqq 2)$ で 1 人の勝ち残りが決まるのは，$n-1$ 回目に 2 人が残っていて n 回目で 1 人が脱落する場合 (脱落する 1 人の選び方が 2 通りで，その負け方が 3 通り)，$n-1$ 回目に 3 人が残っていて n 回目で 2 人脱落する場合 (勝者 1 人の選び方が 3 通りで，その勝ち方が 3 通り) であるから

$$p_{n-1}\cdot\frac{2\cdot3}{3^2}+q_{n-1}\cdot\frac{3\cdot3}{3^3}=\frac{n-1}{3^{n-1}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2n-1}{3^n}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{2n-1}{3^n}}$ ■

2 (1) $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t)$，$\mathrm{Q}\left(2\cos\dfrac{t}{2},\ 2\sin\dfrac{t}{2}\right)$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 4\pi)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos t-1,\ \sin t)=2\sin\frac{t}{2}\left(-\sin\frac{t}{2},\ \cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(2\cos\frac{t}{2}-1,\ 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|2\sin\frac{t}{2}\right|\left|-\sin\frac{t}{2}\cdot2\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\left(2\cos\frac{t}{2}-1\right)\right|\\&=\left|\sin\frac{t}{2}\right|\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

$x=\cos\dfrac{t}{2}$，$f(x)=S^2$ とおくと

$$f(x)=(1-x^2)(2-x)^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$
$$f'(x)=2(2-x)(2x^2-2x-1)$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ に注意して，$f'(x)=0$ を解くと $\quad x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ とおくと，$2a^2-2a-1=0$ より $\quad a^2=a+\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}f(a)&=(1-a^2)(2-a)^2=(1-a^2)(4-4a+a^2)\\&=\left(1-a-\frac{1}{2}\right)\left(4-4a+a+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{9}{2}-3a\right)\\&=3a^2-6a+\frac{9}{4}=3\left(a+\frac{1}{2}\right)-6a+\frac{9}{4}=-3a+\frac{15}{4}=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

よって，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{9+6\sqrt{3}}{4}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $S_k(1) = 1^k$ であるから

$$T_m(1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k$$
$$= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k - ({}_m\mathrm{C}_0 + {}_m\mathrm{C}_m) = \boldsymbol{2^m - 2}$$

$S_k(2) = 1^k + 2^k$ であるから

$$T_m(2) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(2) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k(1^k + 2^k)$$
$$= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k(1 + 2^k) - \{{}_m\mathrm{C}_0(1 + 2^0) + {}_m\mathrm{C}_m(1 + 2^m)\}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k + \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k 2^k - (3 + 2^m)$$
$$= 2^m + (2+1)^m - (3 + 2^m) = \boldsymbol{3^m - 3}$$

(2) $S_k(n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k$ であるから

$$T_m(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n) = \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n) - S_0(n) - S_m(n)$$
$$= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \sum_{j=1}^{n} j^k - n - \sum_{j=1}^{n} j^m$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k j^k - n - \sum_{j=1}^{n} j^m$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (j+1)^m - n - \sum_{j=1}^{n} j^m = \sum_{j=1}^{n} \{(j+1)^m - j^m\} - n$$
$$= \{(n+1)^m - 1^m\} - n = \boldsymbol{(n+1)^m - (n+1)}$$

(3) (2) の結果に $n=p-1$ を代入すると

$$T_m(p-1)=\sum_{k=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_k S_k(p-1)=p^m-p \quad \cdots(*)$$

$(*)$ に $m=2,\ 3,\ 4,\ 5$ を代入すると

$$\begin{aligned}&2S_1(p-1)=p^2-p\\&3S_1(p-1)+3S_2(p-1)=p^3-p\\&4S_1(p-1)+6S_2(p-1)+4S_3(p-1)=p^4-p\\&5S_1(p-1)+10S_2(p-1)+10S_3(p-1)+5S_4(p-1)=p^5-p\end{aligned}$$

これらは法 p について

$$(*)\begin{cases}2S_1(p-1)\equiv 0\\3S_1(p-1)+3S_2(p-1)\equiv 0\\4S_1(p-1)+6S_2(p-1)+4S_3(p-1)\equiv 0\\5S_1(p-1)+10S_2(p-1)+10S_3(p-1)+5S_4(p-1)\equiv 0\end{cases}$$

p は 7 以上の素数であるから，$(*)$ の第 1 式から

$$S_1(p-1)\equiv 0 \pmod{p}$$

これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$3S_2(p-1)\equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_2(p-1)\equiv 0 \pmod{p}$$

上の結果を $(*)$ の第 3 式に代入すると

$$4S_3(p-1)\equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_3(p-1)\equiv 0 \pmod{p}$$

これらの結果を $(*)$ の第 4 式に代入すると

$$5S_4(p-1)\equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_4(p-1)\equiv 0 \pmod{p}$$

よって，$S_1(p-1)$，$S_2(p-1)$，$S_3(p-1)$，$S_4(p-1)$ は p の倍数である． ■