平成24年度　名古屋大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報) 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 xy 平面上に，点 $(0,\ 1)$ を通り，傾きが h の直線 ℓ がある．

(1) xy 平面上において，ℓ に関して点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(s,\ t)$ とする．このとき，a，b，h を用いて，s，t を表せ．ただし，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は ℓ 上にないとする．

(2) xy 平面において，ℓ に関して原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と対称な点を A とする．h が $-1 \leqq h \leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ．

(3) h が $-1 \leqq h \leqq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする．C と直線 $y = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 n を 2 以上の整数とする．1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある．ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする．この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す．この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする．次の問に答えよ．ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする．また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする．

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ．

(2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ．

(3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする．$P(s)$ を求めよ．

(4) n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ．

3 m を正の奇数とする．

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ．

(2) p を正の整数とするとき，$(p-1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ．

(3) r を正の整数とし，$s = 3^{r-1}m$ とする．$2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) ℓ の方向ベクトルを $\vec{v}=(1,\ h)$，法線ベクトルを $\vec{n}=(-h,\ 1)$ とする．B$(0,\ 1)$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $\vec{v}$，$\vec{n}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=k\vec{v}+l\vec{n}$ とすると

$$\begin{aligned}(a,\ b-1)&=k(1,\ h)+l(-h,\ 1)\\&=(k-hl,\ hk+l)\end{aligned}$$

ゆえに $\qquad k=\dfrac{a+h(b-1)}{h^2+1},\quad l=\dfrac{-ha+b-1}{h^2+1}$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=k\vec{v}-l\vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\vec{v}-\vec{n}\\(s,\ t)&=(0,\ 1)+\frac{a+h(b-1)}{h^2+1}(1,\ h)-\frac{-ha+b-1}{h^2+1}(-h,\ 1)\\&=\frac{1}{h^2+1}((1-h^2)a+2hb-2h,\ 2ha+(h^2-1)b+2)\end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{s=\dfrac{(1-h^2)a+2hb-2h}{h^2+1},\quad t=\dfrac{2ha+(h^2-1)b+2}{h^2+1}}$

(2) (1) の結果に $a=b=0$ を代入すると $\quad s=\dfrac{-2h}{h^2+1},\quad t=\dfrac{2}{h^2+1}$

$\mathrm{A}\left(\dfrac{-2h}{h^2+1},\ \dfrac{2}{h^2+1}\right)$ であるから

$$\mathrm{OA}=\sqrt{\frac{4h^2}{(h^2+1)^2}+\frac{4}{(h^2+1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{h^2+1}}$$

$-1\leqq h\leqq 1$ において，OA は

$h=0$ のとき最大値 2，$h=\pm1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$

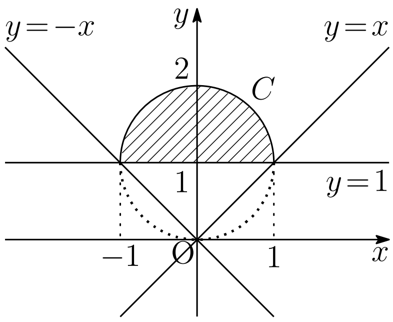
(3) $x=-\dfrac{2h}{h^2+1}$, $y=\dfrac{2}{h^2+1}$ とすると　$y>0$, $\dfrac{x}{y}=-h$

$-1 \leqq h \leqq 1$ より　$-1 \leqq \dfrac{x}{y} \leqq 1$　ゆえに　$y \geqq -x$, $y \geqq x$

$(h^2+1)y=2$ より，$\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right)y=2$ であるから

$$x^2+y^2=2y \quad \text{ゆえに} \quad x^2+(y-1)^2=1$$

したがって，C と直線 $y=1$ で囲まれた部分は，下の図の斜線部分である．



よって，求める面積は　$\dfrac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

別解 $x=-\dfrac{2h}{h^2+1}$, $y=\dfrac{2}{h^2+1}$,　$-1 \leqq h \leqq 1$ より

$$h=\tan\theta \ \left(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

とおくと

$$x=-\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=-2\sin\theta\cos\theta=-\sin 2\theta=\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y=\frac{2}{1+\tan^2\theta}=2\cos^2\theta=\cos 2\theta+1=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)+1$$

このとき　$0 \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{2} \leqq \pi$　■

2 (1) 3回とも j から $j+k$ までのカードが出る確率であるから

$$\left(\frac{j+k-j+1}{n}\right)^3=\boldsymbol{\frac{(k+1)^3}{n^3}}$$

(2) (i) 出た目が i $(j<i<j+k)$，j，$j+k$ となる場合の総数は

$$\{(j+k-1)-(j+1)+1\}\cdot 3!=6(k-1)\ (\text{通り})$$

(ii) 出た目が j，j，$j+k$ となる場合の総数は　3 (通り)

(iii) 出た目が j，$j+k$，$j+k$ となる場合の総数は　3 (通り)

(i)〜(iii) から，$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる場合の総数は

$$6(k-1)+3+3=6k \quad \cdots(*)$$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{6k}{n^3}}$

別解 $A(j,i):X\geqq j$ かつ $Y\leqq i$ とすると　$P(A(j,i))=\dfrac{(i-j+1)^3}{n^3}$

したがって，求める確率は

$$P(A(j,j+k))-P(A(j+1,j+k)\cup A(j,j+k-1)) \quad \cdots(**)$$

ここで

$$\begin{aligned}&P(A(j+1,j+k)\cup A(j,j+k-1))\\&=P(A(j+1,j+k))+P(A(j,j+k-1))-P(A(j+1,j+k-1))\\&=\frac{k^3}{n^3}+\frac{k^3}{n^3}-\frac{(k-1)^3}{n^3}\end{aligned}$$

$(**)$ より，求める確率は　$\dfrac{(k+1)^3}{n^3}-\left\{\dfrac{k^3}{n^3}+\dfrac{k^3}{n^3}-\dfrac{(k-1)^3}{n^3}\right\}=\dfrac{6k}{n^3}$

(3) $Y-X=s$ となるは，$X=j,\ Y=j+s$ $(j=1,2,\cdots,\ n-s)$

したがって，$(*)$ により

$$P(s)=\frac{6s}{n^3}\times(n-s)=\boldsymbol{\frac{6s(n-s)}{n^3}}$$

(4) (3) の結果から　$P(s)=-\dfrac{6}{n^3}\left(s-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2n}$

n は偶数であるから，求める s は　$\boldsymbol{s=\dfrac{n}{2}}$　■

3 (1) $(x-1)^{101}$ の x^2 の項は　${}_{101}\mathrm{C}_2 x^2(-1)^{99} = -5050x^2$

よって，求める係数は　$\boldsymbol{-5050}$

(2) $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ および m が奇数であるから

$$(p-1)^m + 1 \equiv (-1)^m + 1 = 0 \pmod{p}$$

よって，$(p-1)^m + 1$ は p で割り切れる．

(3) まず，自然数 r について

$$2^{3^{r-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r} \quad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す．

(i) $r=1$ のとき，明らか．

(ii) $r=k$ のとき

$$2^{3^{k-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^k}$$

が成立すると仮定する，このとき，$N = 2^{3^{k-1}} + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} 2^{3^k} + 1 &= (2^{3^{k-1}})^3 + 1 = (N-1)^3 + 1 \\ &= N(N^2 - 3N + 3) \end{aligned}$$

N は 3^k で割り切れ，$N^2 - 3N + 3$ は 3 で割り切れるから

$$2^{3^k} + 1 \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$$

したがって，すべての自然数 r について，$(*)$ は成立する．

$(*)$ より　　$2^{3^{r-1}} \equiv -1 \pmod{3^r}$

この両辺を m 乗すると

$$(2^{3^{r-1}})^m \equiv (-1)^m \quad \text{ゆえに} \quad 2^{3^{r-1}m} \equiv -1 \pmod{3^r}$$

したがって　　$2^{3^{r-1}m} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$

よって，$s = 3^{r-1}m$ とすると，$2^s + 1$ は 3^r で割り切れる，

補足 2 は 3^r と互いに素であるから，フェルマー・オイラーの定理[1]により

$$2^{\varphi(3^r)} \equiv 1 \pmod{3^r}$$

このとき，$\varphi(3^r) = 3^r\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = 2{\cdot}3^{r-1}$ であるから

$$2^{2\cdot 3^{r-1}} - 1 = (2^{3^{r-1}} + 1)(2^{3^{r-1}} - 1) \equiv 0 \pmod{3^r}$$

ここで　　$2^{3^{r-1}} - 1 \equiv (-1)^{3^{r-1}} - 1 \equiv -2 \pmod{3}$

よって　　$2^{3^{r-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$　■

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6 を参照)