

平成24年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

- 1** xy 平面上に、点 $(0, 1)$ を通り、傾きが h の直線 l がある。
- (1) xy 平面上において、 l に関して点 $P(a, b)$ と対称な点を $Q(s, t)$ とする。このとき、 a, b, h を用いて、 s, t を表せ。ただし、点 $P(a, b)$ は l 上にならないとする。
 - (2) xy 平面において、 l に関して原点 $O(0, 0)$ と対称な点を A とする。 h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くとき、線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ。
 - (3) h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする。 C と直線 $y = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- 2** n を2以上の整数とする。1から n までの整数が1つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし、異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから、1枚のカードを無作為に取り出して、書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を3回繰り返し、取り出したカードに書かれた整数の最小値を X 、最大値を Y とする。次の問に答えよ。ただし、 j と k は正の整数で、 $j + k \leq n$ を満たすとする。また、 s は $n - 1$ 以下の正の整数とする。
- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j + k$ となる確率を求めよ。
 - (2) $X = j$ かつ $Y = j + k$ となる確率を求めよ。
 - (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする。 $P(s)$ を求めよ。
 - (4) n が偶数のとき、 $P(s)$ を最大にする s を求めよ。
- 3** m を正の奇数とする。
- (1) $(x - 1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。
 - (2) p を正の整数とすると、 $(p - 1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。
 - (3) r を正の整数とし、 $s = 3^{r-1}m$ とする。 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。

解答例

- 1** (1) l の方向ベクトルを $\vec{v} = (1, h)$, 法線ベクトルを $\vec{n} = (-h, 1)$ とする.
 $B(0, 1)$ とおき, \vec{BP} を \vec{v}, \vec{n} を用いて, $\vec{BP} = k\vec{v} + l\vec{n}$ とすると

$$\begin{aligned}(a, b-1) &= k(1, h) + l(-h, 1) \\ &= (k-hl, hk+l)\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad k = \frac{a+h(b-1)}{h^2+1}, \quad l = \frac{-ha+b-1}{h^2+1}$$

このとき, $\vec{BQ} = k\vec{v} - l\vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= \vec{OB} + k\vec{v} - l\vec{n} \\ (s, t) &= (0, 1) + \frac{a+h(b-1)}{h^2+1}(1, h) - \frac{-ha+b-1}{h^2+1}(-h, 1) \\ &= \frac{1}{h^2+1}((1-h^2)a + 2hb - 2h, 2ha + (h^2-1)b + 2)\end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad s = \frac{(1-h^2)a + 2hb - 2h}{h^2+1}, \quad t = \frac{2ha + (h^2-1)b + 2}{h^2+1}$$

- (2) (1) の結果に $a = b = 0$ を代入すると $s = \frac{-2h}{h^2+1}, \quad t = \frac{2}{h^2+1}$

$A\left(\frac{-2h}{h^2+1}, \frac{2}{h^2+1}\right)$ であるから

$$OA = \sqrt{\frac{4h^2}{(h^2+1)^2} + \frac{4}{(h^2+1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{h^2+1}}$$

$-1 \leq h \leq 1$ において, OA は

$$h = 0 \text{ のとき最大値 } 2, \quad h = \pm 1 \text{ のとき最小値 } \sqrt{2}$$

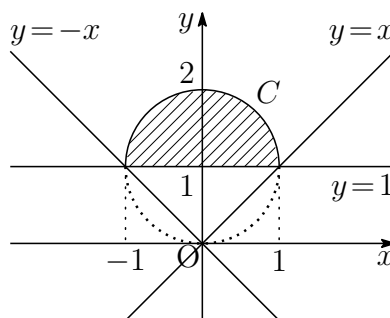
$$(3) \quad x = -\frac{2h}{h^2+1}, \quad y = \frac{2}{h^2+1} \quad \text{とすると} \quad y > 0, \quad \frac{x}{y} = -h$$

$$-1 \leq h \leq 1 \quad \text{より} \quad -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq -x, \quad y \geq x$$

$$(h^2+1)y = 2 \quad \text{より,} \quad \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)y = 2 \quad \text{であるから}$$

$$x^2 + y^2 = 2y \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + (y-1)^2 = 1$$

したがって、 C と直線 $y=1$ で囲まれた部分は、下の図の斜線部分である。



$$\text{よって, 求める面積は} \quad \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{別解} \quad x = -\frac{2h}{h^2+1}, \quad y = \frac{2}{h^2+1}, \quad -1 \leq h \leq 1 \quad \text{より}$$

$$h = \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

とおくと

$$x = -\frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = -2 \sin \theta \cos \theta = -\sin 2\theta = \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y = \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \cos^2 \theta = \cos 2\theta + 1 = \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\text{このとき} \quad 0 \leq 2\theta + \frac{\pi}{2} \leq \pi$$



- 2 (1) 3回とも j から $j+k$ までのカードが出る確率であるから

$$\left(\frac{j+k-j+1}{n}\right)^3 = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

- (2) (i) 出た目が i ($j < i < j+k$), j , $j+k$ となる場合の総数は

$$\{(j+k-1) - (j+1) + 1\} \cdot 3! = 6(k-1) \text{ (通り)}$$

- (ii) 出た目が j , j , $j+k$ となる場合の総数は 3 (通り)

- (iii) 出た目が j , $j+k$, $j+k$ となる場合の総数は 3 (通り)

- (i)~(iii) から, $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる場合の総数は

$$6(k-1) + 3 + 3 = 6k \quad \dots (*)$$

よって, 求める確率は $\frac{6k}{n^3}$

別解 $A(j, i) : X \geq j$ かつ $Y \leq i$ とすると $P(A(j, i)) = \frac{(i-j+1)^3}{n^3}$

したがって, 求める確率は

$$P(A(j, j+k)) - P(A(j+1, j+k) \cup A(j, j+k-1)) \quad \dots (**)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad & P(A(j+1, j+k) \cup A(j, j+k-1)) \\ &= P(A(j+1, j+k)) + P(A(j, j+k-1)) - P(A(j+1, j+k-1)) \\ &= \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \end{aligned}$$

$$(**) \text{ より, 求める確率は } \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{6k}{n^3}$$

- (3) $Y - X = s$ となるは, $X = j$, $Y = j+s$ ($j = 1, 2, \dots, n-s$)

したがって, (*) により

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = \frac{6s(n-s)}{n^3}$$

- (4) (3) の結果から $P(s) = -\frac{6}{n^3} \left(s - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{2n}$

n は偶数であるから, 求める s は $s = \frac{n}{2}$ ■

3 (1) $(x-1)^{101}$ の x^2 の項は ${}_{101}C_2x^2(-1)^{99} = -5050x^2$
 よって、求める係数は **-5050**

(2) $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ および m が奇数であるから

$$(p-1)^m + 1 \equiv (-1)^m + 1 = 0 \pmod{p}$$

よって、 $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れる。

(3) まず、自然数 r について

$$2^{3^r-1} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r} \quad \dots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す。

(i) $r=1$ のとき、明らか。

(ii) $r=k$ のとき

$$2^{3^k-1} + 1 \equiv 0 \pmod{3^k}$$

が成立すると仮定する、このとき、 $N = 2^{3^k-1} + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} 2^{3^k} + 1 &= (2^{3^k-1})^3 + 1 = (N-1)^3 + 1 \\ &= N(N^2 - 3N + 3) \end{aligned}$$

N は 3^k で割り切れ、 $N^2 - 3N + 3$ は 3 で割り切れるから

$$2^{3^k} + 1 \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$$

したがって、すべての自然数 r について、 $(*)$ は成立する。

$(*)$ より $2^{3^r-1} \equiv -1 \pmod{3^r}$

この両辺を m 乗すると

$$(2^{3^r-1})^m \equiv (-1)^m \quad \text{ゆえに} \quad 2^{3^r-1m} \equiv -1 \pmod{3^r}$$

したがって $2^{3^r-1m} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$

よって、 $s = 3^r-1m$ とすると、 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れる、

補足 2 は 3^r と互いに素であるから、フェルマー・オイラーの定理¹により

$$2^{\varphi(3^r)} \equiv 1 \pmod{3^r}$$

このとき、 $\varphi(3^r) = 3^r \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 3^{r-1}$ であるから

$$2^{2 \cdot 3^{r-1}} - 1 = (2^{3^r-1} + 1)(2^{3^r-1} - 1) \equiv 0 \pmod{3^r}$$

ここで $2^{3^r-1} - 1 \equiv (-1)^{3^r-1} - 1 \equiv -2 \pmod{3}$

よって $2^{3^r-1} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$ ■

¹ http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6 を参照)