平成 23 年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 (1) 関数 $y = x^3 - x^2$ のグラフをかけ.

(2) 曲線 $y = x^3 - x^2$ の接線で，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ.

(3) p を定数とする．x の 3 次方程式 $x^3 - x^2 = p\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ.

2 数字の 2 を書いた玉が 1 個，数字の 1 を書いた玉が 3 個，数字の 0 を書いた玉が 4 個あり，これら合計 8 個の玉が袋に入っている．以下の (1) から (3) のそれぞれにおいて，この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さないものとする.

(1) 玉を 2 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ.

(2) 玉を 4 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ.

(3) 玉を 8 度取り出すとき，次の条件が満たされる確率を求めよ.

条件：すべての $n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ に対して，1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である.

3 xy 平面上に 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 1) がある.

(1) $a > 0$ とする．OP : AP $= 1 : a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ.

(2) $a > 1 > b > 0$ とする．OP : AP : BP $= 1 : a : b$ を満たす点 P が存在するための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ.

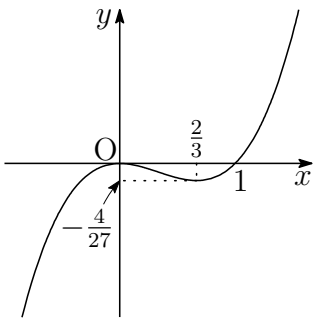
解答例

1 (1) $f(x)=x^3-x^2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-t^2)=(3t^2-2t)(x-t)$$

すなわち　$y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2 \quad \cdots(*)$

接線 $(*)$ が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るとき

$$0=(3t^2-2t)\cdot\frac{3}{2}-2t^3+t^2 \quad \text{すなわち} \quad t(t-2)(4t-3)=0$$

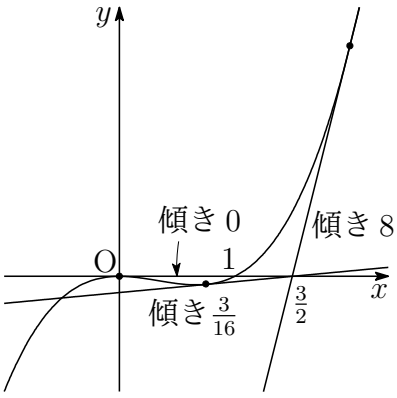
ゆえに　$t=0,\ 2,\ \dfrac{3}{4}$　求める接線の方程式は，これらを $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{y=0,\quad y=8x-12,\quad y=\frac{3}{16}x-\frac{9}{32}}$$

(3) 3 次方程式

$$x^3-x^2=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の異なる共有点の個数である．$y=f(x)$ のグラフと (2) で求めた 3 本の接線は右の図のようになる．



したがって，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{p<0,\ \dfrac{3}{16}<p<8} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{p=0,\ \dfrac{3}{16},\ 8} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{0<p<\dfrac{3}{16},\ 8<p} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \end{cases}$$

■

2 (1) 条件を満たすのは，次の場合である．

回　数		
①	②	確率
2	0	$\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7}$
0	2	$\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{7}$
1	1	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}$

よって，求める確率は　$\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

(2) 玉を 4 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 5 以上である確率は，4 度とも 1 または 2 が書かれた玉が出る確率であるから

$$\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5}=\frac{1}{70}$$

求める確率は，この事象の余事象の確率であるから

$$1-\frac{1}{70}=\mathbf{\frac{69}{70}}$$

(3) k 個取り出したときにはじめて 1 個目から k 個目までの数字の和が $k+1$ となる事象の確率は $(k=1,2,3,4)$

回　数				
①	②	③	④	確　率
2	$*$	$*$	$*$	$\frac{1}{8}$
1	2	$*$	$*$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{7}$
1	1	2	$*$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$
1	1	1	2	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}$

この確率は　$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

求める確率は，この事象の余事象の確率であるから

$$1-\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

■

3 (1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{AP}^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$\mathrm{OP} : \mathrm{AP} = 1 : a$ より，$\mathrm{AP}^2 = a^2\mathrm{OP}^2$ であるから

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

整理すると　$(1-a^2)x^2 + (1-a^2)y^2 - 2x + 1 = 0$

よって　$a = 1$ のとき　**直線** $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$

$a \neq 1$ のとき　**円** $\boldsymbol{\left(x - \dfrac{1}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a}{1-a^2}\right)^2}$

(2) (1) と同様に，$\mathrm{OP} : \mathrm{BP} = 1 : b$ を満たす点 P の軌跡は $(0 < b < 1)$

円 $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{1-b^2}\right)^2 = \left(\dfrac{b}{1-b^2}\right)^2$

ここで，(1) で求めた円を C_1，上の円を C_2 とする．

C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とし，中心間の距離を d とすると

$$|r_1 - r_2| \leqq d \leqq r_1 + r_2 \quad \text{ゆえに} \quad |r_1 - r_2|^2 \leqq d^2 \leqq (r_1 + r_2)^2$$

整理すると　$-2r_1r_2 \leqq d^2 - {r_1}^2 - {r_2}^2 \leqq 2r_1r_2$

すなわち　$|d^2 - {r_1}^2 - {r_2}^2| \leqq 2r_1r_2 \quad \cdots (*)$

このとき

$$
\begin{aligned}
d^2 - {r_1}^2 - {r_2}^2 &= \left(\frac{1}{1-a^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-b^2}\right)^2 - \left(\frac{a}{1-a^2}\right)^2 - \left(\frac{b}{1-b^2}\right)^2 \\
&= \frac{1-a^2}{(1-a^2)^2} + \frac{1-b^2}{(1-b^2)^2} = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2}, \\
r_1 r_2 &= \frac{a}{|1-a^2|} \cdot \frac{b}{|1-b^2|} = \frac{ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|}
\end{aligned}
$$

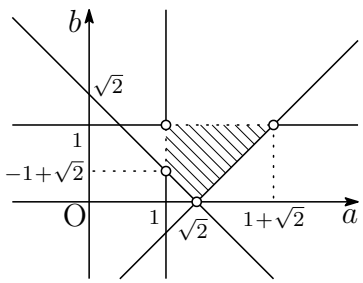
これらを $(*)$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2}\right| &\leqq \frac{2ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|} \\
|a^2+b^2-2| &\leqq 2ab \\
-2ab \leqq a^2+b^2-2 &\leqq 2ab
\end{aligned}
$$

ゆえに　$(a+b)^2 \geqq 2$　かつ　$(a-b)^2 \leqq 2$

よって　$\boldsymbol{a > 1 > b > 0,\ \ a+b \geqq \sqrt{2},\ \ a-b \leqq \sqrt{2}}$

したがって，ab 平面上の不等式の表す領域は下の図の斜線部分で，$\circ$ と点線以外の境界線を含む．



■