平成21年度　名古屋大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報) 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 空間のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が，条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{5}{6}$$

をみたしているとする．ただし，a，b は正の数とする．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

2 放物線 $y = ax^2\ (a > 0)$ と円 $(x - b)^2 + (y - 1)^2 = 1\ (b > 0)$ が，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接しているとする．ただし，$0 < p < b$ とする．この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき，$\angle\mathrm{PQR} = 120^\circ$ であるとする．ここで，放物線と円が点 P で接するとは，P が放物線と円の共有点であり，かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸，および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ．

3 さいころを投げると，1から6までの整数の目が等しい確率で出るとする．さいころを n 回 $(n = 1, 2, 3\cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が $j(j = 0, 1, 2, \cdots, 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする．

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ．

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ．

(3) $p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(a,\ b,\ 0)$ について

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ より　$a^2+b^2=1$,　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$ より　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3}}$

上の2式から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+b^2=1$　　$b>0$ であるから　$\boldsymbol{b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(x,\ y,\ z)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}$ より　$x=\dfrac{1}{2}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5}{6}$ より　$\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}y=\dfrac{5}{6}$

上の2式から　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}y=\dfrac{5}{6}$　ゆえに　$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

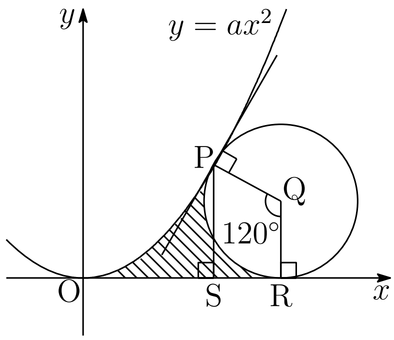
$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ より　$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+z^2=1$　ゆえに　$|z|=\dfrac{1}{2}$

3点O，A，B は xy 平面上にあるから

$$V=\frac{1}{3}S|z|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{18}}$$

■

2 (1) $y=ax^2$ より　$y'=2ax$



放物線 $y=ax^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ における接線の傾きは $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ であるから

$$2ap=\sqrt{3}\quad ゆえに\quad \mathrm{P}\left(p,\ \frac{\sqrt{3}}{2}p\right)$$

PQ=1 より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(p+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}p-\frac{1}{2}\right)$$

Q の y 座標は 1 であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{2}p-\frac{1}{2}=1\quad これを解いて\quad p=\sqrt{3}\quad ゆえに\quad \mathrm{Q}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$$

したがって　$\boldsymbol{b=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$　また，$2ap=\sqrt{3}$ により　$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$

P，Q から x 軸にそれぞれ垂線 PS，QR を引くと，台形 PQRS と半径が 1 で中心角 $\frac{2\pi}{3}$ の扇形の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{8}\sqrt{3},\quad \frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

よって，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2\,dx+\frac{5}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}&=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}+\frac{5}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\\&=\boldsymbol{\frac{9}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

■

3 (1) 1 回目と 2 回目に出た目の積の一の位の数は右の表のようになるから

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

$$p_2(0) = \frac{6}{6^2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$
$$p_2(1) = \frac{1}{6^2} = \boldsymbol{\frac{1}{36}}$$
$$p_2(2) = \frac{6}{6^2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) さいころを n 回まで投げた目の積の一の位と $n+1$ 回目のサイコロの目の積の一の位は次の表のようになる．

	n 回目までの目の積の一の位									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4

よって $\quad \boldsymbol{p_{n+1}(1) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(7)}$

(3) (2) と同様にして

$$p_{n+1}(3) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(3)$$
$$p_{n+1}(7) = \frac{1}{6}p_n(7) + \frac{1}{6}p_n(9)$$
$$p_{n+1}(9) = \frac{1}{6}p_n(3) + \frac{1}{6}p_n(9)$$

(2) の結果と上の 3 式の辺々を加えると

$$p_{n+1}(1) + p_{n+1}(3) + p_{n+1}(7) + p_{n+1}(9) = \frac{1}{3}(p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9))$$

ここで，$p_1(1) + p_1(3) + p_1(7) + p_1(9) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{3}$ であるから

$$p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3^n}}$$

■