# 平成20年度　名古屋大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
# 法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報) 数I・II・A・B

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ より1題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2つの円 $x^2+(y-2)^2=9$ と $(x-4)^2+(y+4)^2=1$ に外接し，直線 $x=6$ に接する円を求めよ．ただし，2つの円がただ1点を共有し，互いに外部にあるとき，外接するという．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の不等式の表す領域を $D$ とする．

$$(x-2)^2+|2x+3y-1| \leqq 4$$

(1) $D$ の概形を描き，その面積を求めよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が $D$ 内を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値およびそれらの値を取る点の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ．

(1) $3x+2y \leqq 8$ を満たす0以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

(2) $3x+2y \leqq 2008$ を満たす0以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 袋Aの中に赤玉と白玉がそれぞれ2つ入っていることと，袋Bの中に赤玉3つと白玉2つが入っていることが分かっている．

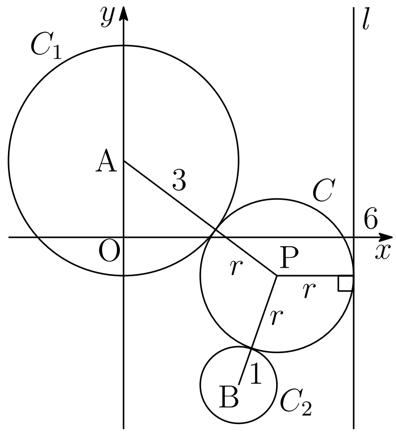
(1) 袋Bから2つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

(2) 袋Aから1つの玉を取り出し，そのあと袋Bから2つの玉を取り出す．その3つの玉のうち赤玉が2つである確率を求めよ．

(3) 袋Aから1つの玉を取り出したあとで，2つの玉を袋Aから取り出すかあるいは2つの玉を袋Bから取り出すかのどちらかを選択できるとする．できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

解答例

**1** 次の 2 円と直線




$$C_1 : x^2 + (y-2)^2 = 9,$$
$$C_2 : (x-4)^2 + (y+4)^2 = 1,$$
$$l : x = 6$$

に外接する円 $C$ の半径を $r$，中心を $\mathrm{P}(6-r,\ p)$ とする．$C_1$，$C_2$ の中心はそれぞれ $\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(4, -4)$ であるから

$$\mathrm{AP}^2 = (r+3)^2, \quad \mathrm{BP}^2 = (r+1)^2$$

したがって

$$(6-r)^2 + (p-2)^2 = (r+3)^2, \quad (2-r)^2 + (p+4)^2 = (r+1)^2$$

上の 2 式をそれぞれ整理すると

$$(*) \begin{cases} 18r = p^2 - 4p + 31 \\ 6r = p^2 + 8p + 19 \end{cases}$$

$(*)$ の 2 式から $r$ を消去して整理すると

$$p^2 + 14p + 13 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p+1)(p+13) = 0$$

$p = -1, -13$ を $(*)$ にそれぞれ代入すると　$r = 2,\ 14$

よって，求める円 $C : (x-6+r)^2 + (y-p)^2 = r^2$ は

$$\boldsymbol{(x-4)^2 + (y+1)^2 = 4} \quad \textbf{または} \quad \boldsymbol{(x+8)^2 + (y+13)^2 = 196}$$

■

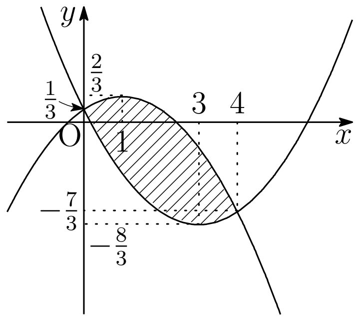
**2** (1) $(x-2)^2+|2x+3y-1| \leqq 4$ より　$|2x+3y-1| \leqq x(4-x)$

$x(4-x) \geqq 0$，すなわち，$0 \leqq x \leqq 4$ のとき

$$-x(4-x) \leqq 2x+3y-1 \leqq x(4-x)$$

$$\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{3} \leqq y \leqq -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{8}{3} \leqq y \leqq -\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}$$




領域 $D$ は右の図の斜線部分である．

その面積は

$$\int_0^4 \left\{-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{3}\right)dx\right\}dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^4 x(4-x)\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}(4-0)^3=\boldsymbol{\frac{64}{9}}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{1}{3}x^2-x-\frac{1}{3} \leqq x+y \leqq -\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{12} \leqq x+y \leqq -\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{29}{12}$$

$0 \leqq x \leqq 4$ であるから，$x+y$ は

$x=\frac{5}{2}$ のとき最大値 $\frac{29}{12}$　このとき　$\frac{5}{2}+y=\frac{29}{12}$　ゆえに　$y=-\frac{1}{12}$

$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{12}$　このとき　$\frac{3}{2}+y=-\frac{5}{12}$　ゆえに　$y=-\frac{23}{12}$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{12}\right)}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{29}{12}}$

$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{23}{12}\right)}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\frac{5}{12}}$

別解　$x+y=k$ とおくと　$l: y=-x+k$

$C_1: y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$，$C_2: y=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{3}$

2 曲線 $C_1$，$C_2$ と直線 $l$ と接点の $x$ 座標は

$C_1$ より　$y'=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=-1$，　$C_2$ より　$y'=\frac{2}{3}x-2=-1$

これらを解くと　$x=\frac{5}{2}$，$\frac{3}{2}$　これから接点と最大値・最小値が求まる．

■

**3** (1) $3x+2y \leqq 8$ ($x$, $y$ は 0 以上の整数) より，$0 \leqq x \leqq 2$ であるから

$x=0$ のとき　$2y \leqq 8$　ゆえに　$y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$x=1$ のとき　$2y \leqq 5$　ゆえに　$y=0,\ 1,\ 2$

$x=2$ のとき　$2y \leqq 2$　ゆえに　$y=0,\ 1$

よって求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数は　$5+3+2=\mathbf{10}$ (個)

(2) $3x+2y=2n$ $(n=0,1,2,\cdots)\cdots$ ① を満たす 0 以上の整数 $x$, $y$ は，
$3x=2(n-y)$ より，$x=2k$ ($k$ は 0 以上の整数) とおくと

$$3\cdot 2k=2(n-y) \quad \text{ゆえに} \quad y=n-3k$$

このとき，$y \geqq 0$ より　$n-3k \geqq 0$　ゆえに　$k \leqq \dfrac{n}{3}$

したがって，① を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は　$\left[\dfrac{n}{3}\right]+1$

$3x+2y=2n-1$ $(n=1,2,3,\cdots)\cdots$ ② を満たす 0 以上の整数 $x$, $y$ は，
$3(x+1)=2(n+1-y)$ より，$x+1=2k$ ($k$ は 1 以上の整数) とおくと

$$3\cdot 2k=2(n+1-y) \quad \text{ゆえに} \quad y=n+1-3k$$

このとき，$y \geqq 0$ より　$n+1-3k \geqq 0$　ゆえに　$k \leqq \dfrac{n+1}{3}$

したがって，② を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は　$\left[\dfrac{n+1}{3}\right]$

$N=334$ とおくと，$2008=2(3N+2)$

① より，$3x+2y=2n$ $(n=0,1,2,\cdots,3N+2)$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{3N+2}\left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right) &= \left(\left[\frac{0}{3}\right]+\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]\right)\\ &\qquad \cdots+\left(\left[\frac{3N}{3}\right]+\left[\frac{3N+1}{3}\right]+\left[\frac{3N+2}{3}\right]\right)+(3N+3)\\ &=(0+3+\cdots+3N)+(3N+3)\\ &=\frac{3}{2}N(N+1)+3(N+1)=\frac{3}{2}(N+1)(N+2)\end{aligned}$$

②より，$3x+2y=2n-1$ $(n=1,2,\cdots,3N+2)$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\sum_{n=1}^{3N+2}\left[\ \frac{n+1}{3}\ \right]=\left[\frac{2}{3}\right]+\left(\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]\right)$$
$$\cdots+\left(\left[\frac{3N}{3}\right]+\left[\frac{3N+1}{3}\right]+\left[\frac{3N+2}{3}\right]\right)+\left[\frac{3N+3}{3}\right]$$
$$=0+(3+6+\cdots+3N)+N+1$$
$$=\frac{3}{2}N(N+1)+(N+1)=\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)$$

よって，$2x+3y\leqq 2008$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}(N+1)(N+2)+\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)&=(N+1)(3N+4)\\&=(334+1)(3\cdot 334+4)\\&=\mathbf{337010}\end{aligned}$$

補足 $a$，$n$ を整数とすると

$$\left[\frac{a}{n}\right]+\left[\frac{a+1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{a+n-1}{n}\right]=a$$

別解 座標平面上において，$x=k$ 上にある格子点の個数は

$$\left[1004-\frac{3}{2}k\right]+1=\left[1005-\frac{3}{2}k\right]$$

(i) $k=2m$ $(m=0,1,2,\cdots,334)$ のとき，格子点の個数は

$$\left[1005-\frac{3}{2}\cdot 2m\right]=1005-3m$$

(ii) $k=2m+1$ $(m=0,1,2,\cdots,334)$ のとき，格子点の個数は

$$\left[1005-\frac{3}{2}(2m+1)\right]=\left[1003-3m+\frac{1}{2}\right]=1003-3m$$

$A=334$ とおくと，$1005=3A+3,\ 1003=3A+1$ に注意して

$$\sum_{m=0}^{A}(3A+3-3m)+\sum_{m=0}^{A}(3A+1-3m)$$
$$=\sum_{m=0}^{A}(6A+4-6m)$$
$$=(6A+4)(A+1)-6\cdot\frac{1}{2}A(A+1)$$
$$=(A+1)(3A+4)=(334+1)(3\cdot 334+4)=\mathbf{337010}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 袋 B から 2 個の玉を取り出すとき，赤玉が $k$ 個取り出される確率を $P_B(k)$ とすると $(k=0,1,2)$

$$P_B(0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10},\quad P_B(1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5},\quad P_B(2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

よって，求める期待値は

$$E(X)=0\cdot P_B(0)+1\cdot P_B(1)+2\cdot P_B(2)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{3}{10}=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

(2) 袋 A から 1 個の玉を取り出すとき，赤玉が $k$ 個取り出される確率を $P_A(k)$ とすると $(k=0,1)$，求める確率は

$$P_A(0)P_B(2)+P_A(1)P_B(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}=\boldsymbol{\frac{9}{20}}$$

(3) 袋 A から赤玉が 1 個取り出されたとき，袋 A に残った 3 個の玉 (赤玉 1 個，白玉 2) から 2 個取り出すとき，赤玉を取り出す個数の期待値は

$$E(Y)=1\cdot\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$$

袋 A から白玉が 1 個取り出されたとき，袋 A に残った 3 個の玉 (赤玉 2 個，白玉 1) から 2 個取り出すとき，赤玉を取り出す個数の期待値は

$$E(Z)=1\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}+2\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{4}{3}$$

$E(Y)<E(X)<E(Z)$ であるから，最初に袋 A から取り出した玉が赤玉であるとき，次に取り出す袋は B であり，最初に袋 A から取り出した玉が白玉であるとき，次に取り出す袋は A である．
したがって，最終的に取り出される赤玉の個数を $X$ とすると

$$\begin{aligned}
P(X=1)&=P_A(0)\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}+P_A(1)\cdot P_B(0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{23}{60},\\
P(X=2)&=P_A(0)\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}+P_A(1)\cdot P_B(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{15},\\
P(X=3)&=P_A(1)\cdot P_B(2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{20}
\end{aligned}$$

よって，求める期待値は　$1\cdot\frac{23}{60}+2\cdot\frac{7}{15}+3\cdot\frac{3}{20}=\boldsymbol{\frac{53}{30}}$

別解 $P_A(0)E(Y)+P_A(1)\{1+E(X)\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{6}{5}\right)=\boldsymbol{\frac{53}{30}}$ ■