

平成18年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

問題 1 2 3

- 1 $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数 k に対して, xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D , E , F を考える.

D は連立不等式 $y \geq x^2$, $y \leq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leq x^2$, $y \geq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leq -x^2 + 2x$, $y \geq kx$ で表される領域

- (1) 領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ.
(2) (1) で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と, その最小値を求めよ.

- 2 xy 平面上に点 $A(2, 4)$ がある. 平面上の直線 ℓ に関して点 A と対称な点が x 軸上にあるとき, 直線 ℓ をピッタリ直線と呼ぶことにする.

- (1) 点 $P(p, q)$ を通るピッタリ直線 ℓ があるとし, ℓ に関して対称な点を $A'(t, 0)$ とするとき, p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ.
(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ.
(3) 点 $P(p, q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ.

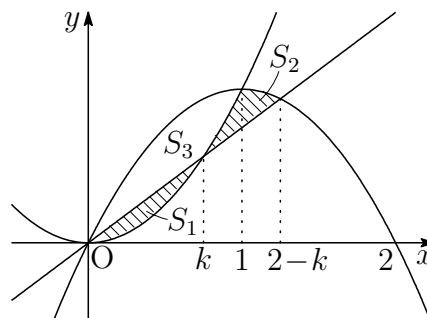
- 3 正六面体の各面に 1 つずつ, サイコロのように, 1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて, 向かい合う面の数の和は 7 である. このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている. この状態から始めて, 次の試行を繰り返し行う. 「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする.」ただし, これらの 4 面の数字が a_1, a_2, a_3, a_4 のとき, それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする. この試行を n 回繰り返した後, 底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ ($n \geq 1$) で表す. $q_n = p_n(1) + p_n(6)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく.

- (1) q_1, q_2 を求めよ.
(2) q_n を q_{n-1} で表し, q_n を求めよ.
(3) $p_n(1)$ を求めよ.

解答例

- 1** (1) $D \cup (E \cap F)$ の表す領域は、右の図の斜線部分である．右の図の領域の面積を S_1 , S_2 , S_3 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^k (kx - x^2) dx \\ &= \int_0^k x(k - x) dx = \frac{k^3}{6}, \end{aligned}$$



$$S_1 + S_3 = \int_0^1 \{(-x^2 + 2x) - x^2\} dx = 2 \int_0^1 x(1 - x) dx = \frac{1}{3},$$

$$S_2 + S_3 = \int_0^{2-k} \{(-x^2 + 2x) - kx\} dx = \int_0^{2-k} x(2 - k - x) dx = \frac{1}{6}(2 - k)^3$$

したがって、求める $m(k)$ は

$$\begin{aligned} m(k) &= S_1 + S_2 = 2S_1 - (S_1 + S_3) + (S_2 + S_3) \\ &= 2 \cdot \frac{k^3}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(2 - k)^3 \\ &= \frac{1}{6}(k^3 + 6k^2 - 12k + 6) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $m'(k) = \frac{k^2}{2} + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2 + 4k - 4)$

$0 < k < 1$ に注意して、 $m'(k) = 0$ を解くと $k = 2\sqrt{2} - 2$

k	0	...	$2\sqrt{2} - 2$	...	1
$m'(k)$		-	0	+	
$m(k)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで、 $k^3 + 6k^2 - 12k + 6 = (k^2 + 4k - 4)(k + 2) - 16k + 14$ より

$$6m(k) = 2m'(k)(k + 2) + 2(7 - 8k)$$

$$m(k) = \frac{1}{3}m'(k)(k + 2) + \frac{1}{3}(7 - 8k)$$

$m'(2\sqrt{2} - 2) = 0$ であるから、求める最小値は

$$m(2\sqrt{2} - 2) = \frac{1}{3}\{7 - 8(2\sqrt{2} - 2)\} = \frac{23 - 16\sqrt{2}}{3}$$

■

- 2** (1) ℓ は 2 点 $A(2, 4)$, $A'(t, 0)$ を結ぶ線分 AA' の垂直二等分線であるから,
 ℓ 上の点を $Q(x, y)$ とすると, $AQ^2 = A'Q^2$ であるから

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-t)^2 + y^2$$

これを整理すると $(4-2t)x + 8y + t^2 - 20 = 0 \quad \cdots (*)$

この直線上に点 $P(p, q)$ があるから $(4-2t)p + 8q + t^2 - 20 = 0$

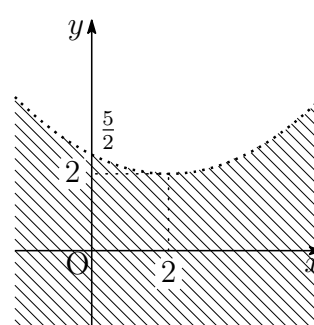
よって $t^2 - 2pt + 4p + 8q - 20 = 0 \quad \cdots (**)$

- (2) (1) で求めた t に関する 2 次方程式を D とすると, $D > 0$ を満たすから

$$D/4 = (-p)^2 - (4p + 8q - 20) > 0$$

よって $q < \frac{1}{8}(p-2)^2 + 2$

求める領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含まない.



- (3) ピッタリ直線が直交するときの 2 つの t の値を α, β とすると, 2 次方程式 $(**)$ の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2p, \quad \alpha\beta = 4p + 8q - 20 \quad (A)$$

(*) から, それぞれのピッタリ直線の法線ベクトルを

$$\vec{n}_\alpha = (4 - 2\alpha, 8), \quad \vec{n}_\beta = (4 - 2\beta, 8)$$

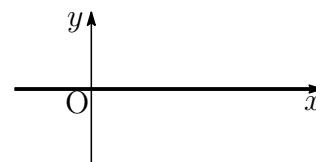
とすると, $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$ より, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$ であるから

$$\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 20 = 0$$

これに (A) を代入すると

$$(4p + q - 20) - 2 \cdot 2p + 20 \quad \text{ゆえに} \quad q = 0$$

よって, 求める領域は, 右の図の太線である.



3 (1) $p_1(1) = 0, p_1(6) = 0$ より $q_1 = p_1(1) + p_1(6) = 0$

$p_1(2) + p_1(3) + p_1(4) + p_1(5) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_2(1) &= p_1(2) \times \frac{1}{1+3+4+6} + p_1(3) \times \frac{1}{1+2+5+6} \\ &\quad + p_1(4) \times \frac{1}{1+2+5+6} + p_1(5) \times \frac{1}{1+3+4+6} \\ &= \frac{1}{14} \{p_1(2) + p_1(3) + p_1(4) + p_1(5)\} = \frac{1}{14} \times 1 = \frac{1}{14}, \\ p_2(6) &= p_1(2) \times \frac{6}{1+3+4+6} + p_1(3) \times \frac{6}{1+2+5+6} \\ &\quad + p_1(4) \times \frac{6}{1+2+5+6} + p_1(5) \times \frac{6}{1+3+4+6} \\ &= \frac{6}{14} \{p_1(2) + p_1(3) + p_1(4) + p_1(5)\} = \frac{6}{14} \times 1 = \frac{6}{14} \end{aligned}$$

$$\text{よって } q_2 = p_2(1) + p_2(6) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$$

(2) (1) と同様にして

$$\begin{aligned} p_n(1) &= p_{n-1}(2) \times \frac{1}{1+3+4+6} + p_{n-1}(3) \times \frac{1}{1+2+5+6} \\ &\quad + p_{n-1}(4) \times \frac{1}{1+2+5+6} + p_{n-1}(5) \times \frac{1}{1+3+4+6} \\ &= \frac{1}{14} \{p_{n-1}(2) + p_{n-1}(3) + p_{n-1}(4) + p_{n-1}(5)\} = \frac{1}{14} (1 - q_{n-1}), \\ p_n(6) &= p_{n-1}(2) \times \frac{6}{1+3+4+6} + p_{n-1}(3) \times \frac{6}{1+2+5+6} \\ &\quad + p_{n-1}(4) \times \frac{6}{1+2+5+6} + p_{n-1}(5) \times \frac{6}{1+3+4+6} \\ &= \frac{6}{14} \{p_{n-1}(2) + p_{n-1}(3) + p_{n-1}(4) + p_{n-1}(5)\} = \frac{6}{14} (1 - q_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\text{上の 2 式の辺々を加えると } q_n = \frac{1}{2} (1 - q_{n-1}) \quad \cdots (*)$$

$$q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(q_{n-1} - \frac{1}{3} \right) \quad \text{ゆえに} \quad q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって } q_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

$$(3) (*) \text{ から } p_n(1) = \frac{1}{14} (1 - q_{n-1}) = \frac{1}{7} q_n = \frac{1}{21} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} \quad \blacksquare$$