

平成17年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

- 法・文・教育・情報文化学部 [1] [2] [3]
- 経済学部 [1] [2] 必答, [3] [4] より1題選択

[1] 放物線 $R: y = -x^2 + 6$ と直線 $\ell: y = x$ との交点を A, B とする. 直線 $y = x + t$ ($t > 0$) は放物線 R と相異なる2点 $C(t)$, $D(t)$ で交わるものとする.

- (1) 放物線 R と直線 ℓ とで囲まれた図形の面積 T を求めよ.
- (2) 4つの点 A, B, $C(t)$, $D(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし,
 $f(t) = \frac{S(t)}{T}$ とおく. $f(t)$ の最大値を求めよ.

[2] 1 から 13 までの数が1つ書かれているカードが52枚あり, 各数について4枚ずつある. この52枚のカードから, 戻さずに続けて2枚とりだし, そのカードに書かれた数を順に x , y とする. 関数 $f(x, y) = \log_3(x+y) - \log_3 x - \log_3 y + 1$ を考える.

- (1) カードに書かれた数 x , y で, $f(x, y) = 0$ となるものをすべて求めよ.
- (2) $f(x, y) = 0$ となる確率を求めよ.

[3] (1) 複素数 z を未知数とする方程式 $z^6 = 64$ の解をすべて求めよ.
(2) (1) で求めた解 $z = p + qi$ (p, q は実数) のうち, 次の条件をみたすものをすべて求めよ.

条件: x を未知数とする3次方程式 $x^3 + \sqrt{3}qx + q^2 - p = 0$ が, 整数の解を少なくとも1つもつ.

[4] p, q, r, s を実数として, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となるための条件を求めよ.

(2) (1) が成り立つとき, $A^2B - BA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ を示し,

$$A^3 - B^3 - (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

を求めよ.

解答例

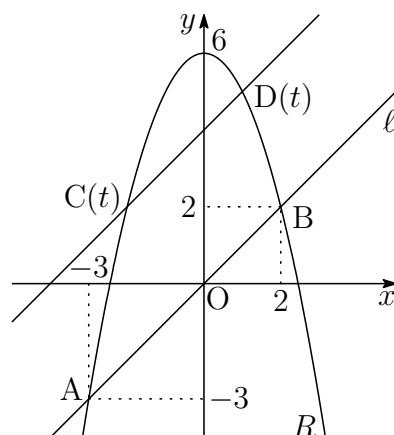
- 1 (1) $y = -x^2 + 6$ と $y = x$ から y を消去すると

$$x^2 + x - 6 = 0$$

ゆえに $(x+3)(x-2) = 0$

これを解いて $x = -3, 2$

$$\begin{aligned} T &= \int_{-3}^2 \{(-x^2 + 6) - x\} dx \\ &= - \int_{-3}^2 (x+3)(x-2) dx \\ &= \frac{1}{6} \{2 - (-3)\}^3 = \frac{125}{6} \end{aligned}$$



- (2) 2点 $C(t)$, $D(t)$ の x 座標を α , β とすると, α , β は, 2次方程式

$$-x^2 + 6 = x + t \quad \text{すなわち} \quad x^2 + x + t - 6 = 0$$

の解であり, これを解くと

$$(*) \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{25 - 4t}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |\beta - \alpha| = \sqrt{25 - 4t}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad C(t)D(t) &= |\beta - \alpha| \sqrt{1^2 + 1^2} = |\beta - \alpha| \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{25 - 4t} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad AB = |2 - (-3)| \sqrt{1^2 + 1^2} = 5\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

平行な2直線 $x - y = 0$, $x - y + t = 0$ の距離を d とすると, d は原点と直線 $x - y + t = 0$ の距離であるから, $t > 0$ に注意して

$$d = \frac{|t|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{t}{\sqrt{2}} \quad \dots \textcircled{3}$$

①～③ より

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} \sqrt{25 - 4t} + 5\sqrt{2} \right) \frac{t}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{25 - 4t} + 5) t \end{aligned} \quad (**)$$

(*) は異なる2つの解であるから ($t > 0$) $0 < t < \frac{25}{4}$

$u = \sqrt{25 - 4t}$, $g(u) = S(t)$ とおくと $\left(0 < t < \frac{25}{4}\right)$, $(**)$ は

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{2}(u+5) \times \frac{25-u^2}{4} \quad (0 < u < 2) \\ &= \frac{1}{8}(-u^3 - 5u^2 + 25u + 125) \\ g'(u) &= \frac{1}{8}(-3u^2 - 10u + 25) \\ &= -\frac{1}{8}(u+5)(3u-5) \end{aligned}$$

u	(0)	$\dots$	$\frac{5}{3}$	$\dots$	(5)
$g'(u)$		+	0	-	
$g(u)$		$\nearrow$	$\frac{500}{27}$	$\searrow$	

したがって $0 < S(t) \leq \frac{500}{27}$ ゆえに $0 < \frac{S(t)}{T} \leq \frac{6}{125} \cdot \frac{500}{27}$

よって, $f(t) = \frac{S(t)}{T}$ の最大値は $\frac{8}{9}$

別解 $g(u) = \frac{1}{8}(5+u)(25-u^2) = \frac{1}{8}(5+u)^2(5-u)$

3 正数 $5+u$, $5+u$, $2(5-u)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(5+u) + (5+u) + 2(5-u)}{3} \geq \sqrt[3]{2(5+u)^2(5-u)}$$

したがって $\left(\frac{20}{3}\right)^3 \geq 2(5+u)^2(5-u)$ ゆえに $g(u) \leq \frac{500}{27}$

上式において, 等号が成立するとき

$$5+u = 2(5-u) \quad \text{すなわち} \quad u = \frac{5}{3}$$



- 2** (1) $f(x, y) = \log_3(x + y) - \log_3 x - \log_3 y + 1$ が $f(x, y) = 0$ となるとき

$$\log_3 \frac{3(x + y)}{xy} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3(x + y)}{xy} = 1$$

整理すると $xy - 3x - 3y = 0$ ゆえに $(x - 3)(y - 3) = 9$

1 から 13 の整数 x, y について, これを満たす組は

$$(x - 3, y - 3) = (1, 9), (3, 3), (9, 1)$$

よって $(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$

- (2) 場合の総数は 52×51 (通り)

$(x, y) = (4, 12)$ となるのは 4×4 (通り)

$(x, y) = (6, 6)$ となるのは 4×3 (通り)

$(x, y) = (12, 4)$ となるのは 4×4 (通り)

よって, 求める確率は

$$\frac{4 \times 4 + 4 \times 3 + 4 \times 4}{52 \times 51} = \frac{11}{663}$$



3 (1) $z^6 = 64$ の解は

$$z = 2 \left(\cos \frac{k}{3}\pi + i \sin \frac{k}{3}\pi \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

よって $z = \pm 2, \pm 1 \pm \sqrt{3}i$ (複号任意)

(2) (i) $z = 2$ のとき, $p = 2, q = 0$ より $x^3 - 2 = 0$
これは整数解をもたない.

(ii) $z = -2$ のとき, $p = -2, q = 0$ より $x^3 + 2 = 0$
これは整数解をもたない.

(iii) $z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき, $p = 1, q = \sqrt{3}$ より

$$x^3 + 3x + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2 + 3) = -2$$

整数解をもつとすると, $x = \pm 1, \pm 2$ であるが, 上式を満たさない.

(iv) $z = -1 + \sqrt{3}i$ のとき, $p = -1, q = \sqrt{3}$ より

$$x^3 + 3x + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x^2 - x + 4) = 0$$

このとき, 整数解 -1 をもつ.

(v) $z = -1 - \sqrt{3}i$ のとき, $p = -1, q = -\sqrt{3}$ より

$$x^3 - 3x + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2 - 3) = -4$$

整数解をもつとすると, $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ であるが, 上式を満たさない.

(vi) $z = 1 - \sqrt{3}i$ のとき, $p = 1, q = -\sqrt{3}$ より

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2(x+2) = 0$$

このとき, 整数解 $1, -2$ をもつ.

(i)~(vi) より, 求める z は $z = -1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$ ■

4 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+ps & p+r \\ q+s & 1+qr \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+qr & p+r \\ q+s & 1+ps \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ps-qr & 0 \\ 0 & qr-ps \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, $AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる条件は $ps - qr = 1$

(2) $AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} A^2B - BA^2 &= A(AB - BA) + (AB - BA)A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -p \\ q & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ -q & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上の結果を用いて

$$\begin{aligned} &A^3 - B^3 - (A - B)(A^2 + AB + B^2) \\ &= -A^2B - AB^2 + BA^2 + BAB \\ &= -(A^2B - BA^2) - (AB - BA)B \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & r \\ -s & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -r \\ s & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■