平成 15 年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

- 法・文・教育・情報文化学部　1　2 必答，　3　4 より 1 題選択
- 経済学部　2　4 必答，　1　5 より 1 題選択

1 △OAB の頂角 ∠O の二等分線と辺 AB との交点を P，点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする．以下では，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．

(1) P は線分 AB を $|\vec{a}| : |\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ．

(2) 線分の長さ OQ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

2 放物線 $C : y = ax^2$ $(a > 0)$ を考える．放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p \neq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を ℓ とする．直線 ℓ と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(\mathrm{P})$ とする．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 点 P を $p > 0$ の範囲で動かす．$S(\mathrm{P})$ が最小となるときの，直線 ℓ の傾き m と $S(\mathrm{P})$ を求めよ．

3 n を自然数とするとき，$m \leqq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする．

(1) $f(15)$ を求めよ．

(2) $p,\ q$ を互いに異なる素数とする．このとき $f(pq)$ を求めよ．

4 一つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている．この箱から k 枚 $(3 \leqq k \leqq 12)$ のカードを同時に取り出す．このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする．

(1) $p(k)$ を求めよ．

(2) $4 \leqq k \leqq 12$ のとき，$f(k) = \dfrac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ．

(3) $p(k)$ を最大にする k の値を求めよ．

5 a を 0 でない実数とする．座標平面上の点列 $\{\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を次のように定める．$(x_0,\ y_0) = (0,\ 0)$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

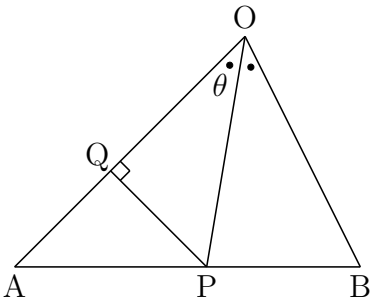
(1) P_n $(n \geqq 1)$ の座標を求めよ．

(2) $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_1$ となる $n \geqq 2$ が存在するための a の条件を求めよ．そのときの点列をすべて求めよ．

解答例

1 (1) $\theta = \angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{BOP}$ とおくと

$$\triangle\mathrm{AOP} : \triangle\mathrm{BOP} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB} \quad \cdots ①$$



また $\triangle\mathrm{AOP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\sin\theta$

$\triangle\mathrm{BOP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OP}\sin\theta$

したがって $\triangle\mathrm{AOP} : \triangle\mathrm{BOP} = \mathrm{OA} : \mathrm{OB} \quad \cdots ②$

①，② より $\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{OA} : \mathrm{OB} = |\vec{a}| : |\vec{b}|$

(2) (1) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \quad \cdots ③$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{a}|} \quad \cdots ④$

$\mathrm{OQ} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta$ であるから，③，④ より

$$\mathrm{OQ} = \frac{\vec{a}\cdot(|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{a}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} = \frac{|\vec{b}||\vec{a}|^2 + |\vec{a}|(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} = \frac{\boldsymbol{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a}\cdot\vec{b}}}{\boldsymbol{|\vec{a}| + |\vec{b}|}}$$

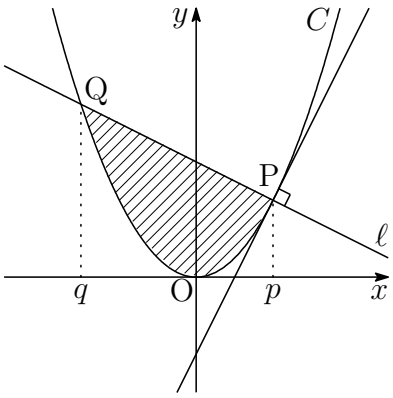
■

2 (1) $y = ax^2$ を微分すると　$y' = 2ax$

$x = p$ のとき　$y' = 2ap$

ℓ は点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2ap}$ の直線であるから

$$\boldsymbol{y - ap^2 = -\frac{1}{2ap}(x - p)}$$



(2) ℓ と C の共有点で P と異なる点を $\mathrm{Q}(q,\ aq^2)$ とすると

$$aq^2 - ap^2 = -\frac{1}{2ap}(q - p) \quad \text{ゆえに} \quad a(q+p)(q-p) = -\frac{1}{2ap}(q-p)$$

$q - p \neq 0$ であるから

$$a(q+p) = -\frac{1}{2ap} \quad \text{ゆえに} \quad q = -p - \frac{1}{2a^2p}$$

ℓ と C で囲まれた部分の面積 $S(\mathrm{P})$ は

$$\begin{aligned} S(\mathrm{P}) &= \int_q^p \left\{ -\frac{1}{2ap}(x-p) + ap^2 - ax^2 \right\} dx \\ &= \int_q^p (p-x) \left\{ \frac{1}{2ap} + a(p+x) \right\} dx \\ &= a \int_q^p (p-x) \left(x + p + \frac{1}{2a^2p} \right) dx \\ &= a \int_q^p (p-x)(x-q) dx = \frac{a}{6}(p-q)^3 = \frac{a}{6}\left(2p + \frac{1}{2a^2p} \right)^3 \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$2p + \frac{1}{2a^2p} \geqq 2\sqrt{2p \cdot \frac{1}{2a^2p}} = \frac{2}{a}$$

上式において，等号が成立するとき

$$2p = \frac{1}{2a^2p} \quad \text{ゆえに} \quad 2ap = 1$$

このとき，(1) の結果から，ℓ の傾き m は　$\boldsymbol{m = -1}$

$$S(\mathrm{P}) = \frac{a}{6}\left(\frac{2}{a} \right)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3a^2}}$$

■

3 (1) 15 と互いに素である数は

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 14$$

の 8 個であるから　　$\boldsymbol{f(15)=8}$

別解 15 以下の自然数について，$15=3\times5$ より

$$\begin{aligned} &3\text{ の倍数の個数は} && \frac{15}{3}\\ &5\text{ の倍数の個数は} && \frac{15}{5}\\ &15\text{ の倍数の個数は} && \frac{15}{15} \end{aligned}$$

よって

$$f(15)=15-\frac{15}{3}-\frac{15}{5}+\frac{15}{15}=\boldsymbol{8}$$

(2) pq 以下の自然数について

$$\begin{aligned} &p\text{ の倍数の個数は} && \frac{pq}{p}\\ &q\text{ の倍数の個数は} && \frac{pq}{q}\\ &pq\text{ の倍数の個数は} && \frac{pq}{pq} \end{aligned}$$

よって

$$f(pq)=pq-\frac{pq}{p}-\frac{pq}{q}+\frac{pq}{pq}=\boldsymbol{(p-1)(q-1)}$$

補足 1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) という[1]．本題は，これに因んだ出題である．　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (pp.4-8)

4 (1) 40 枚から k 枚取り出す場合の数は

$$ {}_{40}\mathrm{C}_k \quad (\text{通り}) $$

k 枚を取り出すとき，3 枚が同じ数で，残り $k-3$ 枚がこの 3 枚も含め互いに異なる数となる場合の数について

- 3 枚が同じ数となる場合の数は，同じ数となる 10 通りに対し，その 3 枚のカードの取り方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通りであるから

$$ 10 \times {}_4\mathrm{C}_3 \quad (\text{通り}) $$

- 残り $k-3$ 枚が互いに異なる場合の数は，異なる数 ${}_9\mathrm{C}_{k-3}$ 通りに対し，そのカード取り方がそれぞれ 4 通り，すなわち，4^{k-3} 通りであるから

$$ {}_9\mathrm{C}_{k-3} \times 4^{k-3} \quad (\text{通り}) $$

したがって

$$ P(k) = \frac{10 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_9\mathrm{C}_{k-3} \times 4^{k-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_k} = \boldsymbol{\frac{10 \times {}_9\mathrm{C}_{k-3} \times 4^{k-2}}{{}_{40}\mathrm{C}_k}} $$

(2) (1) の結果から

$$ \begin{aligned} f(k) = \frac{p(k-1)}{p(k)} &= \frac{10 \times {}_9\mathrm{C}_{k-4} \times 4^{k-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_{k-1}} \times \frac{{}_{40}\mathrm{C}_k}{10 \times {}_9\mathrm{C}_{k-3} \times 4^{k-2}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{{}_{40}\mathrm{C}_k}{{}_{40}\mathrm{C}_{k-1}} \times \frac{{}_9\mathrm{C}_{k-4}}{{}_9\mathrm{C}_{k-3}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{40!}{k!(40-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(41-k)!}{40!} \\ &\qquad \times \frac{9!}{(k-4)!(13-k)!} \cdot \frac{(k-3)!(12-k)!}{9!} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{41-k}{k} \times \frac{k-3}{13-k} = \boldsymbol{\frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)}} \end{aligned} $$

(3) (2) の結果から $\quad \dfrac{p(k)}{p(k-1)} = \dfrac{4k(13-k)}{(41-k)(k-3)}$

$$ \frac{p(k)}{p(k-1)} - 1 = \frac{-3k^2+8k+123}{(41-k)(k-3)} = \frac{123-k(3k-8)}{(41-k)(k-3)} $$

ここで，$g(k) = 123 - k(3k-8)$ とおくと

$$ 4 \leqq k \leqq 7 \text{ のとき } g(k) > 0, \quad 8 \leqq k \leqq 12 \text{ のとき } g(k) < 0 $$

ゆえに $\quad p(3) < p(4) < \cdots < p(6) < p(7) > p(8) > \cdots > p(12)$

よって，$p(k)$ を最大にする k の値は $\qquad \boldsymbol{k = 7}$ ■

5 (1) $A=\begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (*)$$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ $\cdots$①

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = -a^2\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ であるから，$(*)$ より，$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}-x_n \\ y_{n+1}-y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n-x_{n-1} \\ y_n-y_{n-1} \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \end{pmatrix}$$
$$= A^n\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = (-a^2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} x_{k+1}-x_k \\ y_{k+1}-y_k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1}(-a^2)^k\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1-(-a^2)^n}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \qquad (**)$$

よって $\quad \mathbf{P_n}\left(\dfrac{\mathbf{1-(-a^2)^n}}{\mathbf{1+a^2}}, \dfrac{\mathbf{a\{1-(-a^2)^n\}}}{\mathbf{1+a^2}}\right)$

(2) $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_1$ となるとき，① および $(**)$ から

$$\frac{1-(-a^2)^n}{1+a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (-a^2)^{n-1} = 1$$

$-a^2=-1$，$n-1$ は偶数　すなわち　$\boldsymbol{a=\pm 1}$，$\boldsymbol{n}$ が奇数のとき　$\mathbf{P_n = P_1}$

このとき　$\boldsymbol{a=\pm 1}$，$\left(\dfrac{\mathbf{1-(-1)^n}}{\mathbf{2}}, \dfrac{\mathbf{\pm\{1-(-1)^n\}}}{\mathbf{2}}\right)$　(複号同順) ■