平成14年度　名古屋大学　2次試験前期日程 (数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数I・II・A・B

- 法・文・教育・情報文化学部　1　2 必答，　3　4 より1題選択
- 経済学部　1　2 必答，　4　5 より1題選択

1 n を自然数とするとき，3つの数 $a=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1$，$b=1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$，$c=\dfrac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ．

2 次の様に円 C_n を定める．まず，C_0 は $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円，C_1 は $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円とする．次に C_0，C_1 に外接し x 軸に接する円を C_2 とする．さらに，$n=3,4,5,\cdots$ に対し，順に，C_0，C_{n-1} に外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする．C_n $(n\geqq 1)$ の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，2つの円が外接するとは，中心間の距離がそれぞれの円の半径の和に等しいことをいう．

(1) $n\geqq 1$ に対し，$b_n=\dfrac{{a_n}^2}{2}$ を示せ．

(2) a_n を求めよ．

3 辺 AB の長さがそれぞれ AB $=10$，BC $=6$，AC $=8$ の $\triangle$ABC がある．辺 AB 上に点 P，辺 AC 上に点 Q を，$\triangle$APQ の面積が $\triangle$ABC の面積の $\dfrac{1}{2}$ になるようにとる．

(1) 2辺の長さの和 AP $+$ AQ を u とおく．$\triangle$APQ の周の長さ ℓ を u を用いて表せ，

(2) ℓ が最小となるときの AP，AQ，ℓ の値を求めよ．

4 O を原点とする座標平面上の曲線 $y=x^2$ 上の2点 A，B に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t$ とおく．

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $t=2$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 P の軌跡を求め，図示せよ．

5 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ および列ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = P^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\cdots$ $\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = P^m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\cdots$ を考える.

(1) 点 $(1,\ 1)$ と点 $(a_1,\ b_1)$ の距離 d_1 を求めよ.

(2) 平面上の2点 $(x,\ y)$, $(z,\ w)$ 間の距離を s とする. 2点 $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)$, $\left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{2}w,\ \frac{1}{2}z + \frac{2}{3}w\right)$ 間の距離 t を s を用いて表せ.

(3) 点 $(a_{m-1},\ b_{m-1})$ と点 $(a_m,\ b_m)$ の距離 d_m $(m = 2, 3, 4, \cdots)$ を求めよ.

解答例

1 5 つの正数 $1+\dfrac{1}{n},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}+1+1+1+1\right) > \sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{n}\right)1^4}$$

$$\frac{1}{5n} > \sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1 \qquad (*)$$

$n>1$ のとき，5 つの正数 $1-\dfrac{1}{n},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{n}+1+1+1+1\right) > \sqrt[5]{\left(1-\frac{1}{n}\right)1^4}$$

$$1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}} > \frac{1}{5n} \qquad (**)$$

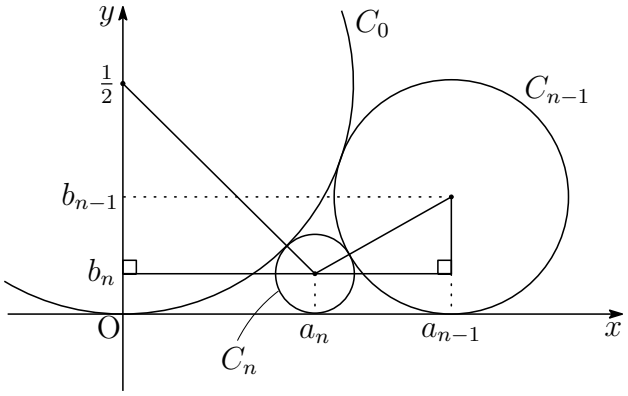
$(**)$ は $n=1$ のときも成立するから，$(*)$, $(**)$ より，自然数 n について

$$1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}} > \frac{1}{5n} > \sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b>c>a}$$

■

2 (1) C_0 と C_n が外接するから

$$\left(\frac{1}{2}+b_n\right)^2=\left(\frac{1}{2}-b_n\right)^2+{a_n}^2 \quad \text{ゆえに} \quad b_n=\frac{{a_n}^2}{2}$$



(2) C_{n-1} と C_n が外接するから

$$(b_{n-1}+b_n)^2=(b_{n-1}-b_n)^2+(a_{n-1}-a_n)^2$$

整理すると $\qquad 4b_{n-1}b_n=(a_{n-1}-a_n)^2$

これに (1) の結果を代入すると

$${a_{n-1}}^2{a_n}^2=(a_{n-1}-a_n)^2$$

$0<a_n<a_{n-1}$ であるから

$$a_{n-1}a_n=a_{n-1}-a_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+1 \qquad (*)$$

C_1 の中心が $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ であるから $\quad a_1=1$

$(*)$ より，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ は，初項 1，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{n}}$$

■

3 (1) △ABC は，∠C = 90° の直角三角形であるから

$$\sin A = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{4}{5}$$

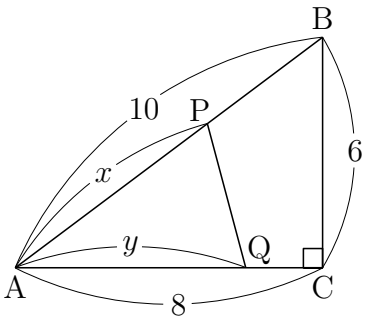
△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 6 = 24$

△APQ の面積は，△ABC の面積の $\dfrac{1}{2}$ より，AP = x，AQ = y とおくと

$$\frac{1}{2}xy\sin A = \frac{1}{2}xy\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{2}\times 24 \quad \text{ゆえに} \quad xy = 40 \quad \cdots ①$$

△APQ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos A \\ &= x^2 + y^2 - 2\cdot 40\cdot\frac{4}{5} \\ &= x^2 + y^2 - 64 \end{aligned}$$



$x + y = u$，$xy = 40$ より

$$\mathrm{PQ}^2 = (x+y)^2 - 2xy - 64 = u^2 - 2\cdot 40 - 64 = u^2 - 144$$

よって　　$\ell = x + y + \mathrm{PQ} = \boldsymbol{u + \sqrt{u^2 - 144}}$

(2) (1) の結果および ① から

$$\begin{aligned} \ell &= x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 144} \\ &= x + \frac{40}{x} + \sqrt{\left(x + \frac{40}{x}\right)^2 - 144} \end{aligned} \qquad (*)$$

2 つの正数 x, $\dfrac{40}{x}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x + \frac{40}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{40}{x}} = 4\sqrt{10} \qquad (**)$$

上式において，等号が成立するとき

$$x = \frac{40}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = y = 2\sqrt{10}$$

(*)，(**) より，ℓ は，$\mathbf{AP = AQ = 2\sqrt{10}}$ のとき，最小値 $\mathbf{4\sqrt{10} + 4}$ ■

4 (1) $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とおくと

$$t = ab + a^2b^2 = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(ab + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

よって，t のとり得る値の範囲は　　$\boldsymbol{t \geqq -\dfrac{1}{4}}$

(2) $t = 2$ のとき　　$ab + a^2b^2 = 2$

$$(ab+2)(ab-1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad ab = -2,\ 1$$

$(x,\ y) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$x = a + b, \quad y = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

(i) $ab = -2$ のとき　$y = x^2 + 4$
このとき，$a,\ b$ を解とする 2 次方程式は　$\lambda^2 - x\lambda - 2 = 0$
この方程式の判別式は

$$D = x^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = x^2 + 8 > 0$$

よって　$y = x^2 + 4$

(ii) $ab = 1$ のとき　$y = x^2 - 2$
このとき，$a,\ b$ を解とする 2 次方程式は　$\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0$
この方程式は実数解をもつから

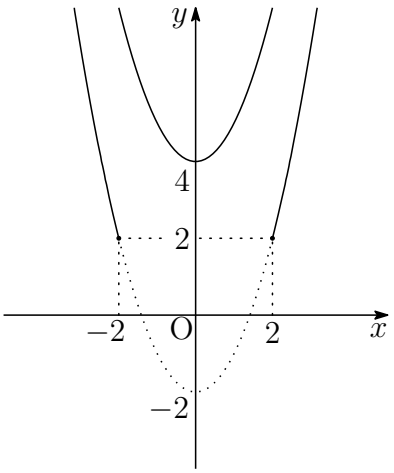
$$D = x^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = x^2 - 4 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad x \leqq -2,\ 2 \leqq x$$

よって　$y = x^2 - 2\ (x \leqq -2,\ 2 \leqq x)$

したがって，点 P の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{y = x^2 + 4}$$
$$\boldsymbol{y = x^2 - 2\ \ (x \leqq -2,\ \ 2 \leqq x)}$$

点 P の軌跡は，右の図のとおり．



■

5 (1) $P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} a_1-1 \\ b_1-1 \end{pmatrix}=(P-E)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって　　$d_1=\dfrac{1}{6}\sqrt{(-5)^2+1}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{26}}{6}}$

(2) 2 点 $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ について，$u=\begin{pmatrix} z-x \\ w-y \end{pmatrix}$, $v=Pu$ とおくと

$$s^2=|u|^2={}^tuu,\quad t^2=|v|^2={}^t(Pu)Pu={}^tu{}^tPPu$$

${}^tPP=\dfrac{25}{36}E$ であるから

$$t^2=\frac{25}{36}{}^tuu=\frac{25}{36}|u|^2=\frac{25}{36}s^2\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{t=\frac{5}{6}s}$$

(3) (2) の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} a_{m-1} \\ b_{m-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ に対応させることにより

$$d_m=\frac{5}{6}d_{m-1}$$

したがって，(1) の結果より

$$\boldsymbol{d_m=\frac{\sqrt{26}}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}}$$

■