平成13年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

- 法・文・教育・情報文化学部 ① ② 必答, ③ ④ より1題選択
- 経済学部 ① ② 必答, ④ ⑤ より1題選択

① 関数 $f(x) = -|2x - 1| + 1$ ($0 \leq x \leq 1$) を用いて, 関数

$$g(x) = -|2f(x) - 1| + 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を考える. $0 < c < 1$ のとき, $g(x) = c$ を満たす x を求めよ.

② a, b, c は定数とし, $a > 0$ とする.

- (1) 曲線 $y = -ax^3 + bx + c$ の接線で点 $(0, t)$ (t は実数) を通るものがただ一本存在することを示せ.
- (2) (1) の接線が正の傾きを持つための t の範囲を求めよ.

③ a, b を正定数とし, 平面ベクトル $\vec{OA} = (2a, a)$, $\vec{OB} = (0, 2b)$ を考える. 線分 OB の中点を C とする. 直線 OA, OB 上にない平面上の点 P に対し, 点 P を通り, 直線 OB に平行な直線と直線 OA との交点を Q とし, 点 P を通り, 直線 OA に平行な直線と直線 OB との交点を R とすると, $\vec{OQ} = s\vec{OA}$, $\vec{OR} = t\vec{OB}$ と表される. ただし s, t は実数である.

- (1) k を正定数とするとき, $t = (s - k)^2$ を満たす点 P のなす曲線 F の方程式を求めよ.
- (2) 直線 AC が F と接するとき, k の値を求めよ.

④ サイレンを断続的に鳴らして16秒の信号を作る. ただし, サイレンは1秒または2秒鳴り続けて1秒休み, これを繰り返す. また, 信号はサイレンの音で始まり, サイレンの音で終わるものとする.

- (1) 1秒または2秒鳴り続けられる回数をそれぞれ m 回, n 回とするとき, m, n の満たす関係式を求めよ.
- (2) 信号は何通りできるか.

⑤ ある正の整数 p, q に対し,

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+2 & -2p \\ -2q & q+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす正数の数列 $\{a_n\}$ が存在するものとする. このとき p, q を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad f(x) = -|2x - 1| + 1 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \text{より} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

$$|2x - 1| = 1 - f(x) \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{1 \pm (1 - f(x))}{2}$$

$$\text{したがって} \quad f^{-1}(x) = \left\{ \frac{x}{2}, \frac{2-x}{2} \right\}$$

$$f^{-1} \circ f^{-1}(x) = \left\{ \frac{x}{4}, \frac{4-x}{4}, \frac{2-x}{4}, \frac{2+x}{4} \right\}$$

$g(x) = f \circ f(x)$ であるから, $g(x) = c$ ($0 < c < 1$) の解は

$$f^{-1} \circ f^{-1}(c) = \left\{ \frac{c}{4}, \frac{4-c}{4}, \frac{2-c}{4}, \frac{2+c}{4} \right\}$$

■

$$\boxed{2} \quad (1) \quad f(x) = -ax^3 + bx + c \quad \text{とおくと} \quad (a > 0)$$

$$f'(x) = -3ax^2 + b, \quad f''(x) = -6ax$$

したがって, 変曲点 $(0, c)$ における接線の方程式は

$$y = bx + c$$

点 $(0, t)$ の x 座標は, 曲線 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標と一致するから, 点 $(0, t)$ から曲線 $y = f(x)$ に引ける接線は 1 本だけである¹.

(2) $b \leq 0$ のとき, $f'(x) \leq 0$ であるから, 曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きは正ではない. $b > 0$ のとき, $f'(x) = 0$ とすると

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{3a}}$$

$$\text{極大値} \quad f\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = \frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}} + c, \quad \text{極小値} \quad f\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = -\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}} + c$$

$$\text{よって} \quad -\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}} + c < t < \frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}} + c$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.12)

3 (1) $\overrightarrow{OA} = (2a, a)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 2b)$

$P(x, y)$ とおくと, $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ より

$$(x, y) = s(2a, a) + t(0, 2b) = (2as, a + 2bt)$$

$a > 0, b > 0$ であるから $s = \frac{x}{2a}$, $t = \frac{1}{2b} \left(y - \frac{x}{2} \right)$

これらを $t = (s - k)^2$ に代入すると

$$\frac{1}{2b} \left(y - \frac{x}{2} \right) = \left(\frac{x}{2a} - k \right)^2$$

よって, 曲線 F の方程式は

$$y = \frac{b}{2a^2}x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2bk}{a} \right)x + 2bk^2$$

(2) 2点 $A(2a, a)$, $C(0, b)$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{a-b}{2a}x + b$$

直線 AC と曲線 F の方程式から y を消去して整理すると

$$\frac{1}{a}x^2 + (1 - 4k)x + 2a(2k^2 - 1) = 0$$

このとき, 係数について

$$(1 - 4k)^2 - 8(2k^2 - 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -8k + 9 = 0$$

よって, $k > 0$ に注意してこれを解くと $k = \frac{9}{8}$ ■

4 (1) 1秒のサイレンが m 回, 2秒のサイレンが n 回であるから, 空白の1秒が $m + n - 1$ 回である. したがって

$$m + 2n + (m + n - 1) = 16 \quad \text{すなわち} \quad 2m + 3n = 17$$

(2) (1) の結果から $2(m - 1) = 3(5 - n)$

これを満たす自然数 (m, n) の組は

$$(m, n) = (1, 5), (4, 3), (7, 1)$$

よって, 求める信号の個数は

$$\frac{(1+5)!}{1!5!} + \frac{(4+3)!}{4!3!} + \frac{(7+1)!}{7!1!} = 6 + 35 + 8 = 49$$
 ■

5 与えられた漸化式は

$$(*) \begin{cases} a_{n+2} = (p+2)a_{n+1} - 2pa_n \\ a_{n+1} = -2qa_{n+1} + (q+2)a_n \end{cases}$$

(*) の第 2 式から, $q > 0$ に注意して

$$a_{n+1} = \frac{q+2}{2q+1}a_n \quad \text{さらに} \quad a_{n+2} = \left(\frac{q+2}{2q+1}\right)^2 a_n$$

これらの 2 式を (*) の第 1 式に代入すると

$$\left(\frac{q+2}{2q+1}\right)^2 a_n = (p+2) \cdot \frac{q+2}{2q+1} a_n - 2pa_n$$

両辺を $a_n > 0$ で割ると

$$\begin{aligned} \left(\frac{q+2}{2q+1}\right)^2 - (p+2) \cdot \frac{q+2}{2q+1} + 2p &= 0 \\ \left(\frac{q+2}{2q+1} - 2\right) \left(\frac{q+2}{2q+1} - p\right) &= 0 \\ -\frac{3q}{2q+1} \left(\frac{q+2}{2q+1} - p\right) &= 0 \end{aligned}$$

$p > 0, q > 0$ より

$$\frac{q+2}{2q+1} - p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2p-1)(2q+1) = 3$$

これを満たす正の整数 p, q は $\mathbf{p = 1, q = 1}$ ■