京大理系 2026 年 3 番

n は正の整数とする．整数係数の多項式

$$(x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$$

のすべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m のうち，最大のものは $n+1$ であることを示せ．ただし，$(x+1)^{2^{n+1}}$ は $x+1$ の 2^{n+1} 乗を表す．$(x^2+1)^{2^n}$ は x^2+1 の 2^n 乗を表す．

解答 [Gemini]

与えられた整数係数の多項式を $F_n(x)$ とおく。

$$F_n(x) = (x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$$

このすべての係数が 2^m で割り切れるような最大の正の整数 m が $n+1$ であることを，2 つのステップに分けて示す。

1. 式の変形と 2 項展開

$(x+1)^{2^{n+1}} = \{(x+1)^2\}^{2^n} = (x^2+2x+1)^{2^n}$ であるから，

$$F_n(x) = (x^2+2x+1)^{2^n} - (x^2+1)^{2^n}$$

と変形できる。ここで，$A = x^2+1,\ B = 2x$ とおくと，二項定理より次のように展開できる。

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= (A+B)^{2^n} - A^{2^n} \\
&= \sum_{k=0}^{2^n} \binom{2^n}{k} A^{2^n-k} B^k - A^{2^n} \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} (x^2+1)^{2^n-k} (2x)^k \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot 2^k \cdot x^k (x^2+1)^{2^n-k}
\end{aligned}$$

2. 各項の係数が持つ 2 の因数の個数の評価

整数 N が持つ 2 の因数の個数（素因数分解したときの 2 の指数）を $v_2(N)$ で表す。各項の係数の因数 2 の個数，すなわち $v_2\left(\binom{2^n}{k}\cdot 2^k\right)$ について考える。

よく知られた二項係数の性質（ルジャンドルの定理の帰結）により，任意の $1 \leqq k \leqq 2^n$ に対して次が成り立つ。

$$v_2\left(\binom{2^n}{k}\right) = v_2(2^n) - v_2(k) = n - v_2(k)$$

したがって，各項の係数に含まれる 2 の因数の総数は次のようになる。

$$v_2\left(\binom{2^n}{k}\cdot 2^k\right) = (n - v_2(k)) + k = n + (k - v_2(k))$$

ここで，すべての正の整数 k に対して $k \geqq v_2(k)+1$ が成り立つ。（実際，k を 2 進数で表記したときの最下位のビットに注目すれば，$k \geqq 2^{v_2(k)} \geqq v_2(k)+1$ は明らかである。）

よって，$k - v_2(k) \geqq 1$ であるから，すべての $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ に対して，

$$n + (k - v_2(k)) \geqq n + 1$$

が成立する。これにより，$F_n(x)$ の展開式のすべての項の係数は 2^{n+1} で割り切れることが示された。すなわち，$m \geqq n+1$ である。

3. 最大値が $n+1$ であることの証明

次に，すべての係数が 2^{n+2} で割り切れることはない（すなわち，2^{n+2} で割り切れない係数が少なくとも 1 つ存在する）ことを示す。多項式 $F_n(x)$ を $\pmod{2^{n+2}}$ で考える。

先ほどの評価式 $n + (k - v_2(k))$ において，等号 $k - v_2(k) = 1$ が成立するのは $k = 1$ および $k = 2$ のときに限られる。

- $k = 1$ のとき： $1 - v_2(1) = 1 - 0 = 1$
- $k = 2$ のとき： $2 - v_2(2) = 2 - 1 = 1$
- $k \geqq 3$ のとき： $k - v_2(k) \geqq 2 \implies n + (k - v_2(k)) \geqq n + 2$

したがって, $k \geqq 3$ の項の係数はすべて 2^{n+2} で割り切れるため，$\pmod{2^{n+2}}$ のもとでは $k = 1, 2$ の項だけを考慮すればよい。

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &\equiv \binom{2^n}{1} \cdot 2^1 \cdot x(x^2+1)^{2^n-1} + \binom{2^n}{2} \cdot 2^2 \cdot x^2(x^2+1)^{2^n-2} \pmod{2^{n+2}} \\
&\equiv 2^{n+1}x(x^2+1)^{2^n-1} + \frac{2^n(2^n-1)}{2} \cdot 4x^2(x^2+1)^{2^n-2} \pmod{2^{n+2}} \\
&\equiv 2^{n+1}x(x^2+1)^{2^n-1} + 2^{n+1}(2^n-1)x^2(x^2+1)^{2^n-2} \pmod{2^{n+2}}
\end{aligned}
$$

ここで，$2^{n+1} \cdot 2^n = 2^{2n+1}$ であり，$n \geqq 1$ より $2n+1 \geqq n+2$ となるため，$2^{n+1} \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{2^{n+2}}$ である。これを利用してさらに整理すると，

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &\equiv 2^{n+1}x(x^2+1)^{2^n-1} - 2^{n+1}x^2(x^2+1)^{2^n-2} \pmod{2^{n+2}} \\
&= 2^{n+1}x(x^2+1)^{2^n-2}\left\{(x^2+1) - x\right\} \\
&= 2^{n+1}x(x^2+1)^{2^n-2}(x^2-x+1) \pmod{2^{n+2}}
\end{aligned}
$$

右辺の多項式 $x(x^2+1)^{2^n-2}(x^2-x+1)$ の最低次（1 次）の項の係数は，各因数の定数項を掛け合わせることで $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$（奇数）となる。

したがって，$F_n(x)$ 全体の 1 次の項の係数は，

$$2^{n+1} \times (\text{奇数})$$

となり，これは 2^{n+1} では割り切れるが，2^{n+2} では割り切れない。

結論

以上の議論より，すべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m のうち，最大のものは $n+1$ である。

（証明終）

1　解答 [GPT-5.5]

n を正の整数とする。整数係数の多項式

$$F(x) = (x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$$

について，すべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m の最大値が $n+1$ であることを示す。

1.1　すべての係数が 2^{n+1} で割り切れること

まず,

$$(x+1)^{2^{n+1}} = \left((x+1)^2\right)^{2^n}$$

であるから,

$$F(x) = \left((x+1)^2\right)^{2^n} \cdot \ (x^2+1)^{2^n}$$

と書ける。
ここで

$$A = (x+1)^2, \qquad B = x^2+1$$

とおくと,

$$F(x) = A^{2^n} - B^{2^n}$$

である。
一般に

$$A^{2^n} - B^{2^n} = (A-B)\prod j = 0^{n-1}\left(A^{2^j} + B^{2^j}\right)$$

が成り立つ。したがって,

$$F(x) = \left((x+1)^2 - (x^2+1)\right)\prod j = 0^{n-1}\left(\left((x+1)^2\right)^{2^j} \cdot \ (x^2+1)^{2^j}\right).$$

ここで

$$(x+1)^2-(x^2+1)=2x$$

である。
また，各 $j=0,1,\ldots,n-1$ について

$$\left((x+1)^2\right)^{2^j}\cdot\ (x^2+1)^{2^j}=(x+1)^{2^{j+1}}\cdot\ (x^2+1)^{2^j}$$

を考える。
法 2 で見ると，

$$(x+1)^2=x^2+2x+1\equiv x^2+1 \pmod 2$$

であるから，

$$\left((x+1)^2\right)^{2^j}\equiv(x^2+1)^{2^j} \pmod 2$$

である。よって

$$\left((x+1)^2\right)^{2^j}\cdot\ (x^2+1)^{2^j}\equiv 2(x^2+1)^{2^j}\equiv 0 \pmod 2$$

である。
したがって，各因子

$$\left((x+1)^2\right)^{2^j}\cdot\ (x^2+1)^{2^j}$$

は，すべての係数が 2 で割り切れる多項式である。
以上より，

$$F(x)=2x\prod_{j=0}^{n-1}\left(\left((x+1)^2\right)^{2^j}\cdot\ (x^2+1)^{2^j}\right)$$

において，因子 $2x$ から 2 が一つ，さらに n 個の因子からそれぞれ 2 が一つずつ取り出せる。
したがって，$F(x)$ のすべての係数は

$$2^{n+1}$$

で割り切れる。

2^{n+2} ではすべての係数が割り切れないこと

次に，$F(x)$ の x の係数を調べる。
まず，

$$(x+1)^{2^{n+1}}$$

における x の係数は

$$\binom{2^{n+1}}{1} = 2^{n+1}$$

である。
一方，

$$(x^2+1)^{2^n}$$

は x^2 の多項式であるから，奇数次の項をもたない。したがって，x の係数は 0 である。
よって，

$$F(x) = (x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$$

における x の係数は

$$2^{n+1} - 0 = 2^{n+1}$$

である。
この係数は 2^{n+1} では割り切れるが，2^{n+2} では割り切れない。
したがって，$F(x)$ のすべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m のうち，最大のものは

$$\boxed{n+1}$$

である。