令和６年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_4 を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

2 $|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して，$z = \dfrac{x+y}{2}$ とする．このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ．

3 座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．線分 OA の中点を P，線分 AB の中点を Q とする．実数 x，y に対して，直線 OC 上の点 X と，直線 BC 上の点 Y を次のように定める．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x，y に関する必要十分条件を求めよ．

4 与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 a_0，a_1，a_2，$\cdots$ を次のように定める．

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) a_0，a_1，a_2，a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

(2) a_0，a_1，$\cdots$，a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

5 a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geqq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y, \quad y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ．

(1) D_a の面積 S_a を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} S_a$ を求めよ．

6 自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする．n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする．また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする．次を求めよ．

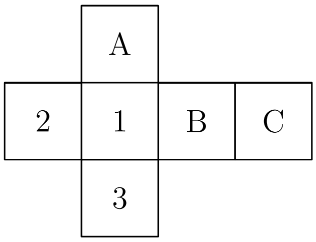
$$\lim_{n \to \infty} \frac{L_n}{N_n}$$

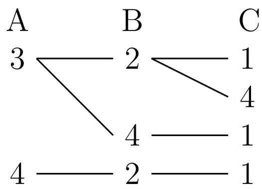
ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である．

解答例

1 (1) 次の立方体の展開図において，1，2，3 の面を異なる色で塗り，残りの A，B，C の面を順番に塗るとき，次の規則に従う．

- A は 1，2 以外の色で塗る．
- B は 1，3，A 以外の色で塗る．
- C は 2，3，A，B 以外の色で塗る．





1〜4 の色で展開図の面を塗る方法は上の樹形図で示した 4 通あり，4 色を 1〜4 に対応させる方法が 4! 通りあるから，求める確率は

$$\frac{4\cdot 4!}{4^6} = \mathbf{\frac{3}{128}}$$

(2) n 個の色で 6 面をすべて異なる色で塗る確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} = \prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) \qquad \text{(A)}$$

この確率と p_n の大小関係について

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} \leqq p_n \leqq 1 \qquad \text{(B)}$$

(A) から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) = 1 \qquad \text{(C)}$$

(B)，(C) からはさみうちの原理により　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = 1}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $|w|=1$ とすると，$|y-(8+6i)|=3$ より　$y=8+6i+3w$

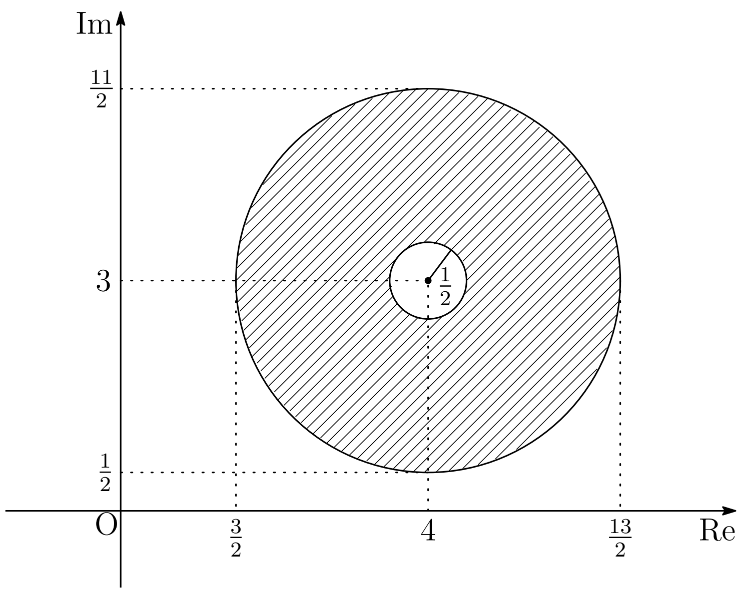
上式を $z=\dfrac{x+y}{2}$ に代入すると　$z=4+3i+\dfrac{3}{2}w+\dfrac{x}{2}$

$|x|\leqq 2$ より，$\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqq 1$ であるから

$$\frac{1}{2}\leqq\left|\frac{3}{2}w\right|-\left|\frac{x}{2}\right|\leqq\left|\frac{3}{2}w+\frac{x}{2}\right|\leqq\left|\frac{3}{2}w\right|+\left|\frac{x}{2}\right|\leqq\frac{5}{2}$$

したがって，z の方程式および表す領域は，図の斜線部分で境界を含む．

$$z=4+3i+rw \qquad \left(\frac{1}{2}\leqq r\leqq\frac{5}{2}\right)$$



また，領域の表す面積は

$$\pi\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\boldsymbol{6\pi}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=(1-y)\vec{b}+y\vec{c}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{QY}}&=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-y)\vec{b}+y\vec{c}-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\vec{b}+y\vec{c},\\
\overrightarrow{\mathrm{PX}}&=\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a},\\
\overrightarrow{\mathrm{QY}}\times\overrightarrow{\mathrm{PX}}&=\left\{-\frac{1}{2}\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\vec{b}+y\vec{c}\right\}\times\left(x\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\\
&=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}y\right)\vec{a}\times\vec{b}+x\left(\frac{1}{2}-y\right)\vec{b}\times\vec{c}+\frac{1}{2}(x-y)\vec{c}\times\vec{a},\\
\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}
\end{aligned}$$

直線QYと直線PXがねじれの位置にあるための x，y に関する必要十分条件は

$$(\overrightarrow{\mathrm{QY}}\times\overrightarrow{\mathrm{PX}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\neq 0\quad ゆえに\quad \frac{1}{2}(x-y)(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\neq 0$$

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は1次独立であるから，$(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\neq 0$ に注意して

$$\frac{1}{2}(x-y)\neq 0\quad よって\quad \boldsymbol{x\neq y}$$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 条件を満たすとき，$n=0,1,2$ について

$$a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{2}$$

が成立するから　　$a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$

$$a_n=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n-1 \qquad (n=0,1,2,3) \qquad (*)$$

$(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^3$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0+1=2^4 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_0=15}$$

(2) $(*)$ と同様に，条件を満たすとき

$$a_n=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n-1 \qquad (n=0,1,\cdots,10)$$

$(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0+1=2^{11} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_0=2047}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ に $y=a$ を代入すると $(a \geqq 1)$

$$a=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^x)^2-2ae^x+1=0$$

$a \geqq 1$ に注意して，e^x について解くと $\qquad e^x=a\pm\sqrt{a^2-1}$

$x \geqq 0$ のとき，$e^x \geqq 1$ であるから，$(a+\sqrt{a^2-1})(a-\sqrt{a^2-1})=1$ より

$$e^x=a+\sqrt{a^2-1} \quad \text{ゆえに} \quad x=\log(a+\sqrt{a^2-1})$$

$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ に $y=a$ を代入すると $(a \geqq 1)$

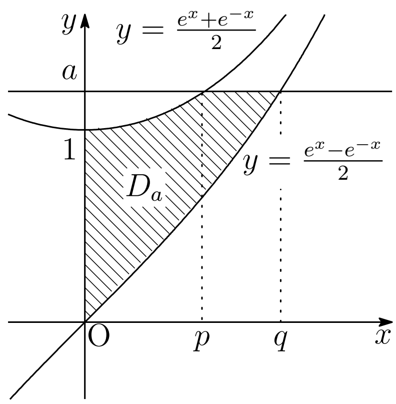
$$a=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^x)^2-2ae^x-1=0$$

$e^x>0$ に注意して，x について解くと

$$e^x=a+\sqrt{a^2+1} \quad \text{ゆえに} \quad x=\log(a+\sqrt{a^2+1})$$

$p=\log(a+\sqrt{a^2-1})$，$q=\log(a+\sqrt{a^2+1})$ とおくと

$$e^p=a+\sqrt{a^2-1}, \quad e^{-p}=a-\sqrt{a^2-1}$$
$$e^q=a+\sqrt{a^2+1}, \quad e^{-q}=-a+\sqrt{a^2+1}$$



したがって，D_a の面積 S_a は

$$\begin{aligned}
S_a &= \int_0^p \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx+\int_p^q \left(a-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx \\
&= \Big[-e^{-x}\Big]_0^p+\left[ax-\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_p^q \\
&= 1+a(q-p)+\frac{e^p-e^{-p}}{2}-\frac{e^q+e^{-q}}{2} \\
&= \boldsymbol{1+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1}}
\end{aligned}$$

(2) まず

$$\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1})=\lim_{a\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2+1}}=0 \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2-1}}$$ より

$$1<\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2-1}}$$

したがって

$$0<a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\frac{a}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2-1} \qquad (*)$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\frac{a}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2-1}&=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{a^2-1}\log\left(1+\frac{2}{a^2-1}\right)^{\frac{a^2-1}{2}}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a-\frac{1}{a}}=0 \qquad (**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{a\to\infty}a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=0 \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) から

$$\lim_{a\to\infty}S_a=\lim_{a\to\infty}\left(1+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1}\right)=\mathbf{1}$$

■

$\boxed{6}$ $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ について a_k の整数部分が n 桁であるとき

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$$

上式の辺々の常用対数をとると　$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < n$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq k < \left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2$$

$[x]$ を x を超えない最大の整数とすると，整数 k の範囲は

$$\left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right] + 1 \leqq k \leqq \left[\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

したがって

$$N_n = \left[\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるとき

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 2\times 10^{n-1}$$

上式の辺々の常用対数をとると　$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < \log_{10}2 + n - 1$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq k < \left(1 + \frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2$$

このとき，整数 k の範囲は

$$\left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right] + 1 \leqq k \leqq \left[\left(1 + \frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

したがって

$$L_n = \left[\left(1 + \frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

$x-1 < [x] \leqq x$ であるから，$x-y-1 < [x]-[y] < x-y+1$ より

$$\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - 1 < N_n < \left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 + 1,$$

$$\left(1 + \frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - 1 < L_n < \left(1 + \frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 + 1$$

前の 2 式をそれぞれ整理すると

$$\frac{2n-1}{(\log_{10} 2)^2} - 1 < N_n < \frac{2n-1}{(\log_{10} 2)^2} + 1,$$
$$\frac{2n-2}{\log_{10} 2} < L_n < \frac{2n-2}{\log_{10} 2} + 2$$

上の 2 式をそれぞれ $2n$ で割ると

$$\frac{1-\frac{1}{2n}}{(\log_{10} 2)^2} - \frac{1}{2n} < \frac{N_n}{2n} < \frac{1-\frac{1}{2n}}{(\log_{10} 2)^2} + \frac{1}{2n},$$
$$\frac{1-\frac{1}{n}}{\log_{10} 2} < \frac{L_n}{2n} < \frac{1-\frac{1}{n}}{\log_{10} 2} + \frac{1}{n}$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{2n} = \frac{1}{(\log_{10} 2)^2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{2n} = \frac{1}{\log_{10} 2}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{2n} \cdot \frac{2n}{N_n} = \frac{1}{\log_{10} 2} \cdot (\log_{10} 2)^2 = \mathbf{\log_{10} 2}$$

■