# 令和５年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
## 理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

**1** 次の各問に答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$ の値を求めよ．

(2) 整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ．

**2** 空間内の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．点 D，P，Q を次のように定める．点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を 1 : 2 に内分し，点 Q は線分 OB の中点である．さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める．このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR : RD を求めよ．

**3** $n$ を自然数とする．1 個のさいころを $n$ 回投げ，出た目を順に $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ とし，$n$ 個の数の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を $Y$ とする．

(1) $Y$ が 5 で割り切れる確率を求めよ．

(2) $Y$ が 15 で割り切れる確率を求めよ．

**4** 次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{1}{e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ただし，$e$ は自然対数の底であり，その値は $e = 2.71\cdots$ である．

**5** O を原点とする $xyz$ 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている．

(a) 点 P は $x$ 軸上にある．

(b) 点 Q は $yz$ 平面上にある．

(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である．

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ．

**6** $p$ を 3 以上の素数とする．また，$\theta$ を実数とする．

(1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ．

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 $m$，$n$ が存在するか否かを理由を付けて判定せよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx &= \frac{4}{3}\int_1^4 (x^{\frac{3}{2}})'\log x\,dx \\ &= \frac{4}{3}\Big[\, x^{\frac{3}{2}}\log x \,\Big]_1^4 - \frac{4}{3}\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{64}{3}\log 2 - \frac{8}{9}\Big[\, x^{\frac{3}{2}} \,\Big]_1^4 = \boldsymbol{\frac{64}{3}\log 2 - \frac{56}{9}}\end{aligned}$$

(2) $x^4+x^3+x^2+x+1$ に関する合同式を考えると

$$x^4+x^3+x^2+x+1 \equiv 0$$

したがって　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\equiv 0$

$x^5\equiv 1$ であるから　$x^{2023}-1=(x^5)^{404}x^3-1\equiv x^3-1$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{x^3-1}$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ R は直線 OD 上の点であるから，実数 $k$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

直線 QR 上の点の位置ベクトルは，実数 $t$ を用いて

$$\begin{aligned}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-t)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + tk(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\ &= 3tk\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left\{\frac{1}{2}(1-t) + 2tk\right\}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3tk\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

これが直線 PC 上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 1 次独立および $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から

$$3tk + 3tk = 1, \quad \frac{1}{2}(1-t) + 2tk = 0$$

これを解いて　$t = \dfrac{5}{3}$，$k = \dfrac{1}{10}$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

よって　**OR : RD = 1 : 9**

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{10}$$

$(*)$ $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると，R は平面 PQC 上の点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{10}(\overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}}{2}$$

確かに，直線 QR は線分 PC の中点を通る．$(*)$ より　**OR : RD = 1 : 9**　■

**3** (1) $Y$ が 5 で割り切れる事象を $A$ とすると　$P(\overline{A}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

求める確率は　$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \boldsymbol{1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$

(2) $Y$ が 3 で割り切れる事象を $B$ とすると

$$P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad P(\overline{A \cup B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A \cup B}) \\ &= \boldsymbol{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x)$ の最大値と最小値は，関数

$$F(t) = e^{-t} + \frac{1}{4}t + 1 + \frac{1}{e^{-t} + \frac{1}{4}t + 1} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

の最大値と最小値に等しい．$p(u) = u + \dfrac{1}{u}$，$q(t) = e^{-t} + \dfrac{1}{4}t + 1$ とおくと

$$F(t) = p(u), \quad u = q(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$q(t)$ を微分すると　$q'(t) = -e^{-t} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{-4 + e^t}{4e^t} < 0 \quad (0 < t < 1)$

$q(t)$ は単調減少であるから

$$q(1) \leqq q(t) \leqq q(0) \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{e} + \frac{5}{4} \leqq u \leqq 2 \quad \cdots ①$$

$p(u)$ を微分すると　$p'(u) = 1 - \dfrac{1}{u^2}$

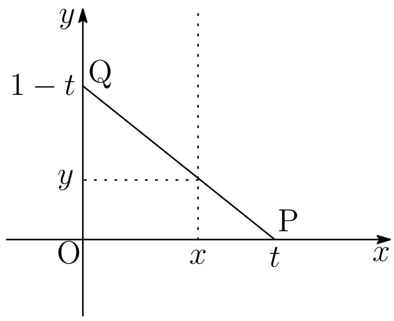
① において，$p(u)$ は単調増加である．

よって　最大値　$p(2) = 2 + \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

　　　　最小値　$p\left(\dfrac{1}{e} + \dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{5e+4}{4e} + \dfrac{4e}{5e+4} = \boldsymbol{\dfrac{41e^2 + 40e + 16}{4e(5e+4)}}$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ P$(t,\ 0)$，Q$(0,\ 1-t)$ とするとき $(0 \leqq t \leqq 1)$，PQ の包絡線 (PQ の通過する領域と通過しない領域の境界線) を求める．




PQ 上の点 $(x,\ y)$ について

$$y = \left(1 - \frac{1}{t}\right)x + 1 - t \qquad \cdots (*)$$

が成立する．ここで，$x$ を固定し，$y$ を $t$ の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{t^2} - 1$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = \sqrt{x}$

これを $(*)$ に代入すると

$$y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)x + 1 - \sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2$$

求める回転体の体積を $V$ とすると，$y$ 軸に関する対称性に注意して

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^1 y^2\,dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}\,)^4\,dx$$

$u = 1 - \sqrt{x}$ とおくと　$x = (1-u)^2$　ゆえに　$\dfrac{dx}{du} = -2(1-u)$

| $x$ | $0 \longrightarrow 1$ |
|---|---|
| $u$ | $1 \longrightarrow 0$ |

したがって　$\dfrac{V}{2\pi} = \displaystyle\int_1^0 u^4 \cdot \{-2(1-u)\}\,du = 2\int_0^1 u^4(1-u)\,du$

$$= 2\int_0^1 (u^4 - u^5)\,du = 2\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

よって　　$V = \boldsymbol{\dfrac{2}{15}\pi}$

別解 [1]　$\dfrac{V}{2\pi} = \displaystyle\int_1^0 u^4 \cdot \{-2(1-u)\}\,du = 2\int_0^1 u^4(1-u)\,du = 2\cdot\frac{4!1!}{6!}(1-0)^6 = \frac{1}{15}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

**6** (1) 加法定理により

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$$
$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

したがって $\quad \cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $n = 1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}
&\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 && \cdots ① \\
&\cos 3\theta = 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta && \cdots ② \\
&\cos 4\theta = 2\cos\theta\cos 3\theta - \cos 2\theta && \cdots ③
\end{aligned}$$

① を ② に代入すると

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta \\
&= \boldsymbol{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}
\end{aligned}$$

上式と ① を ③ に代入すると

$$\begin{aligned}
\cos 4\theta &= 2\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - (2\cos^2\theta - 1) \\
&= \boldsymbol{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1}
\end{aligned}$$

(2) $(*)$ から，$x = \cos\theta$，$f_n(x) = \cos n\theta$ とおける．$f_n(x)$ は $x$ の $n$ 次式で最高次の係数は $2^{n-1}$ である．したがって

$$f_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 \qquad (**)$$

とおける．なお，$a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$ は整数．

$\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 $m,\ n$ が存在すると仮定すると，$n\theta = m\pi$ より

$$\cos n\theta = (-1)^m$$

このとき，$x = \dfrac{1}{p}$，$f_n(x) = (-1)^n$ を $(**)$ に代入すると

$$(-1)^m = \frac{2^{n-1}}{p^n} + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{p^{n-2}} + \cdots + a_0$$

両辺に $p^{n-1}$ を掛けて整理すると

$$-\frac{2^{n-1}}{p} = a_{n-1} + a_{n-2}p + \cdots + \{a_0 - (-1)^m\}p^{n-1}$$

上式の右辺は整数であるが，$p$ が 3 以上の素数であるから，左辺は整数ではない．よって，与えられた条件を満たす整数 $m,\ n$ は存在しない．

補足 $f_n(x)$ は，$n$ が奇数のときは奇関数，$n$ が偶数のときは偶関数である．■