令和４年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

2 箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある．ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする．この箱から 3 枚の札を同時取り出し，札の番号を小さい順に $X,\ Y,\ Z$ とする．このとき，$Y - X \geqq 2$ かつ $Z - Y \geqq 2$ となる確率を求めよ．

3 n を自然数とする．3 つの整数 $n^2 + 2$，$n^4 + 2$，$n^6 + 2$ の最大公約数 A_n を求めよ．

4 四面体 OABC が

$$\mathrm{OA} = 4, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 3, \quad \mathrm{OC} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

5 曲線 $C : y = \cos^3 x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする．$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) S を求めよ．

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ．そのときの t を α とすると，$f(\alpha) = \dfrac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{9}{16}$ を示せ．

6 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$y_{3m+1} = 3m, \quad y_{3m+2} = 3m + 2, \quad y_{3m+3} = 3m + 4 \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．このとき，数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2000 < 2022 < 2048$ より

$$
\begin{aligned}
&\log_4 2022 < \log_4 2048 = \log_4 2^{11} = 5.5, \\
&\log_4 2022 > \log_4 2000 = \frac{\log_{10} 2000}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2 + 3}{2\log_{10} 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10} 2} \\
&\qquad\qquad > \frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 0.3011} = 0.5 + 4.98\cdots > 5.4
\end{aligned}
$$

よって　　$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ n 枚から 3 枚取り出す場合の総数は

$$
{}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad (\text{通り})
$$

$n-2$ 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から $X,\ Y,\ Z$ とする．このとき，X と Y および Y と Z の間にそれぞれ石を 1 個ずつ追加する操作を考える．これら n 個並んだ石の配置について，$X,\ Y,\ Z$ を左から数えた順番とすればよいから，その場合の総数は

$$
{}_{n-2}\mathrm{C}_3 = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} \quad (\text{通り})
$$

よって，求める確率は

$$
\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} \Big/ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}
$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2つの正の整数 $X,\ Y$ の最大公約数を $(X,\ Y)$ と表記することにする．

$$\begin{aligned} n^4+2 &= (n^2+2)(n^2-2)+6, \\ n^6+2 &= (n^2+2)(n^4-2n^2+4)-6 \end{aligned}$$

ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned} (n^4+2,\ n^2+2) &= (n^2+2,\ 6), \\ (n^6+2,\ n^2+2) &= (n^2+2,\ 6) \end{aligned}$$

したがって，3つの整数 $n^2+2,\ n^4+2,\ n^6+2$ の最大公約数 A_n は，

$$A_n = (n^2+2,\ 6)$$

$A_n \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ となるから，法6について

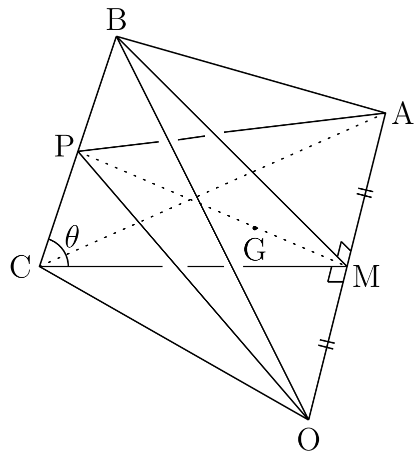
$$\begin{array}{llll} n \equiv 0 \text{ のとき} & n^2+2 \equiv 2 & \text{ゆえに} & A_n = 2 \pmod 6 \\ n \equiv \pm 1 \text{ のとき} & n^2+2 \equiv 3 & \text{ゆえに} & A_n = 3 \pmod 6 \\ n \equiv \pm 2 \text{ のとき} & n^2+2 \equiv 0 & \text{ゆえに} & A_n = 6 \pmod 6 \\ n \equiv 3 \text{ のとき} & n^2+2 \equiv 5 & \text{ゆえに} & A_n = 1 \pmod 6 \end{array}$$

よって $$\boldsymbol{A_n = \begin{cases} \mathbf{2} & (n \equiv 0) \\ \mathbf{3} & (n \equiv \pm 1) \\ \mathbf{6} & (n \equiv \pm 2) \\ \mathbf{1} & (n \equiv 3) \end{cases} \quad (\mathrm{mod}\ 6)}$$ ■

4 (1) OA の中点を M とすると，G は線分 PM を 2 : 1 に内分する点で，2 点 P，G は平面 MBC 上の点である．このとき，BO = AB，OC = AC より

$$\triangle\mathrm{ABM} \equiv \mathrm{OBM}, \quad \triangle\mathrm{ACM} \equiv \mathrm{OCM} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{MB}\perp\mathrm{OA}, \quad \mathrm{MC}\perp\mathrm{OA}$$

したがって　平面 MBC⊥OA　よって　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$



(2) (1) の結果から

$$\mathrm{MB} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$
$$\mathrm{CM} = \sqrt{\mathrm{OC}^2 - \mathrm{OM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$\theta = \angle\mathrm{BCM}$ とおき，△BCM に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CM}^2 - \mathrm{MB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CM}} = \frac{9+8-5}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

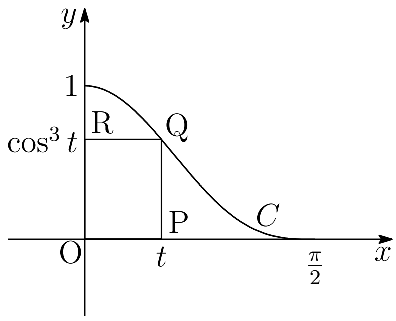
これから　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

PG が最小となるとき，MP⊥BC であるから，求める最小値は

$$\frac{2}{3}\mathrm{MP} = \frac{2}{3}\mathrm{CM}\sin\theta = \frac{2}{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

■

5 (1) 求める面積 S は



$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\cos t\,dt \\
&= \left[\ \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

(2) $f(t) = t\cos^3 t$ であるから，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において

$$f'(t) = \cos^3 t + t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t) = \cos^3 t(1 - 3t\tan t)$$

$g(t) = 1 - 3t\tan t\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$g(t)$ は単調減少で

$$g(0) = 1, \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} = -\infty$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(t) = 0$ をみたす $t = \alpha$ がただ 1 つ存在する．
$f'(t) = g(t)\cos^3 t$ より，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$g(\alpha) = 0$ より $\quad 1 - 3\alpha\tan\alpha \quad$ ゆえに $\quad \alpha = \dfrac{1}{3\tan\alpha}$

したがって $\quad f(\alpha) = \alpha\cos^3\alpha = \dfrac{1}{3\tan\alpha}\cdot\cos^3\alpha = \dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$

(3) $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 - 3\cdot\dfrac{\pi}{6}\tan\dfrac{\pi}{6} = 1 - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}} > 0$ より $\quad \dfrac{\pi}{6} > \alpha$

関数 $\dfrac{\cos^4 t}{3\sin t}\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は単調減少であるから

$$\frac{\cos^4\frac{\pi}{6}}{3\sin\frac{\pi}{6}} > \frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{8} > f(\alpha)$$

上の第 2 式および (1) の結果から

$$\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{3}{8}\Big/\frac{2}{3} = \frac{9}{16}$$

■

6 「0 以上のすべての整数 m について，x_{3m+1}，x_{3m+2}，x_{3m+3} は

$$x_{3m+1} \equiv 0, \quad x_{3m+2} \equiv 0, \quad x_{3m+3} \equiv 1 \pmod 3$$

を満たす整数である」を (A) とする．

［1］$m = 0$ のとき

$$x_1 = 0,\ x_2 = x_1 + 1 + 2\cos\frac{2\pi x_1}{3} = 3,\ x_3 = x_2 + 2 + 2\cos\frac{2\pi x_2}{3} = 7$$

したがって，$m = 0$ のとき (A) は成立する．

［2］$m = k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると　$x_{3k+3} \equiv 1 \pmod 3$

$$\begin{aligned} x_{3k+4} &= x_{3k+3} + 3k + 3 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+3}}{3} \equiv 0 \pmod 3 \\ x_{3k+5} &= x_{3k+4} + 3k + 4 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+4}}{3} \equiv 0 \pmod 3 \\ x_{3k+6} &= x_{3k+5} + 3k + 5 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+5}}{3} \equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

したがって，$m = k + 1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］より，すべての 0 以上の整数 m について (A) が成立する．

(A) の結論から

$$x_{n+1} - x_n - n = 2\cos\frac{2\pi x_n}{3} = \begin{cases} 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases} \qquad (*)$$

$y_{3m+1} = 3m,\quad y_{3m+2} = 3m + 2,\quad y_{3m+3} = 3m + 4 \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$ により

$$y_{n+1} - y_n = \begin{cases} 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$x_{n+1} - x_n - n = y_{n+1} - y_n$　ゆえに　$x_{n+1} - y_{n+1} - (x_n - y_n) = n$

$x_1 = y_1 = 0$ より，$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{x_{k+1} - y_{k+1} - (x_k - y_k)\} = \sum_{k=1}^{n-1} k$

$n = 1$ のときも成立することに注意して　　$\boldsymbol{x_n - y_n = \frac{1}{2}n(n-1)}$

補足 $\left\{\cos\dfrac{2n\pi}{3}\right\}$ の周期性に注目すると

$$2\cos\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} -1 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}$$

上式および $(*)$，$(**)$ の右辺に注目して

$$a_n = 1 - 2\cos\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}$$

とおくと，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2\cos\frac{2k\pi}{3}\right) \\ &= n - 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} \\ &= n - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{2k-1}{3}\pi - \sin\frac{2k+1}{3}\pi\right) \\ &= n - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi \end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ および $x_1 = y_1 = 0$ より

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k - k) = \sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

したがって　　$x_n - \dfrac{1}{2}n(n-1) = y_n = n - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2n-1}{3}\pi$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi, \\ y_n &= n - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi \end{aligned}$$

■