令和３年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．

(1) xyz 空間の 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0, -1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面 α に関して点 P$(1,\ 1,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ．ただし，点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである．

(2) 赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある．よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す．この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ．ただし n は 4 以上の整数とする．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y = \dfrac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし，その交点を Q とおく．線分 PQ の長さを L とするとき，L が取りうる値の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $y = \log(1+\cos x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xy 平面において，2 点 B$(-\sqrt{3}, -1)$，C$(\sqrt{3}, -1)$ に対し，点 A は次の条件 $(*)$ を満たすとする．

$(*)$ $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正．

次の各問に答えよ．

(1) $\triangle$ABC の外心の座標を求めよ．

(2) 点 A が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，$\triangle$ABC の垂心の軌跡を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の各問に答えよ．

(1) n を 2 以上の整数とする．$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ．

(2) a を 1 より大きい定数とする．微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = af(1)$ を満たすとき，曲線 $y = f(x)$ の接線で原点 $(0,\ 0)$ を通るものが存在することを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 3点A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0, -1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面 α の方程式は

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha : 2x-2y+z=2$$

α の法線ベクトルを $\vec{n}=(2, -2,\ 1)$ とし，PQ の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=k\vec{n} \quad (k\text{ は定数}) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{n}$$

M の座標を $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とおくと

$$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(1,1,1)+k(2,-2,\ 1)=(1+2k,\ 1-2k,\ 1+k)$$

M は平面 α 上の点であるから

$$2(1+2k)-2(1-2k)+1+k=2 \quad \text{これを解いて} \quad k=\frac{1}{9}$$

P と Q は平面 α に関して対称であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2k\vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2k\vec{n}=(1,1,1)+\frac{2}{9}(2,-2,\ 1)=\left(\frac{13}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{11}{9}\right)$$

よって　　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{13}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{11}{9}}\right)$

(2) $n-1$ 回目まで赤玉以外の 1 色である場合の数は　3 (通り)
$n-1$ 回目まで赤玉以外の 2 色である場合の数は

$${}_3\mathrm{C}_2(2^{n-1}-2)=3(2^{n-1}-2) \ \ (\text{通り})$$

$n-1$ 回目まで赤玉以外の 3 色である場合の数は

$$3^{n-1}-3(2^{n-1}-2)-3=3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3$$

よって，求める確率は

$$\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n-1}}\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n}}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y=\dfrac{1}{2}(x^2+1)$ を微分すると　　$y'=x$

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}(t^2+1)\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}(t^2+1)=t\,(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=tx+\frac{1}{2}(1-t^2)$$

$t\neq 0$ のとき，この接線は x 軸と交点 Q があり，その x 座標は

$$0=tx+\frac{1}{2}(1-t^2)\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}$$

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2t},\ 0\right)$ であるから，PQ の長さ L は

$$\begin{aligned}L^2&=\left\{\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}\right)-t\right\}^2+\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{4}(t^2+1)^2\\&=\frac{1}{4}\left(t^4+3t^2+3+\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

$s=t^2$，$f(s)=L^2$ とおくと $(s>0)$

$$\begin{aligned}f(s)&=\frac{1}{4}\left(s^2+3s+3+\frac{1}{s}\right),\\f'(s)&=\frac{1}{4}\left(2s+3-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{4s^2}(2s^3+3s^2-1)\\&=\frac{1}{4s^2}(s+1)^2(2s-1)\end{aligned}$$

したがって，$f(s)$ の増減表は

s	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$		$\searrow$	$\frac{27}{16}$	$\nearrow$

よって，$s=\dfrac{1}{2}$，すなわち，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，L は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right) = 0$$

$z \neq 1$ より $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \cdots(*)$

$z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{1}{4}(\sqrt{3}+i)$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{4}{4-4z} = \frac{4}{4-\sqrt{3}-i} \\ &= \frac{4(4-\sqrt{3}+i)}{(4-\sqrt{3})^2+1} = \frac{4-\sqrt{3}+i}{5-2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(4-\sqrt{3})(5+2\sqrt{3}) + (5+2\sqrt{3})i}{13} \\ &= \frac{14+3\sqrt{3}}{13} + \frac{5+2\sqrt{3}}{13}i\end{aligned}$$

$(*)$ の実部を比較すると $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{14+3\sqrt{3}}{13}}$

補足 $(*)$ の虚部を比較すると $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{6} = \frac{5+2\sqrt{3}}{13}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $y = \log(1+\cos x)$ より $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$$
$$= \frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{2}{1+\cos x} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

求める弧長を L とすると

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos \frac{x}{2}}$$

$t = \sin \dfrac{x}{2}$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}\cos \dfrac{x}{2}$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって

$$L = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2}{1-t^2}\, dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt$$
$$= \left[\ \log \frac{1+t}{1-t}\ \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \mathbf{2\log(\sqrt{2}+1)}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{B}(-\sqrt{3}, -1)$，$\mathrm{C}(\sqrt{3}, -1)$ より

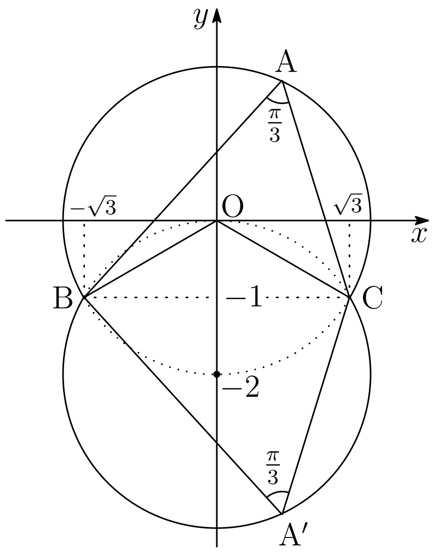
$$\mathrm{BC} = 2\sqrt{3}$$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

△ABC の外心を O とすると，O は BC の垂直二等分線，すなわち，y 軸にあるから，その座標を $(0,\ k)$ とすると

$$\sqrt{3+(k+1)^2} = 2 \quad ゆえに \quad k = 0, -2$$



これらの k について，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ となるのは，A が図の円周上の実線部分にあるときで，その A の y 座標が正であるから

$$k = 0 \quad よって \quad \mathbf{O(0,\ 0)}$$

(2) (1) の結果から，A は O を中心とする半径 2 の円周上の y 座標が正である点であるから，A の座標を次のように定める．

$$\mathrm{A}(s,\ t), \quad s^2 + t^2 = 4, \quad t > 0 \qquad (*)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 0$$

上の結果から，H は △ABC の垂心で，$\mathrm{H}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t-2 \end{pmatrix}$$

$s = x$，$t = y + 2$ を $(*)$ に代入すると

$$x^2 + (y+2)^2 = 4, \quad y + 2 > 0$$

求める軌跡の方程式は $\quad \boldsymbol{x^2 + (y+2)^2 = 4,\ \ y > -2}$

補足 外心 O，重心 G，垂心 H は同一直線 (オイラー線) 上にあり [1]，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$.

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2020.pdf $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $n = pq$ とすると ($p,\ q$ は 1 以外の自然数)

$$3^n - 2^n = (3^p)^q - (2^p)^q = (3^p - 2^p)\sum_{k=1}^{q}(3^p)^{q-k}(2^p)^{k-1}$$

このとき，$3^p - 2^p > 1$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{q}(3^p)^{q-k}(2^p)^{k-1} > 1$ であるから

$$3^n - 2^n$$

は合成数であるから，$3^n - 2^n$ が素数ならば，n は素数である．

(2) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ とおくと　$g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$f(a) = af(1)$ より　$\dfrac{f(1)}{1} = \dfrac{f(a)}{a}$　ゆえに　$g(1) = g(a)$

平均値の定理により，次式を満たす c $(1 < c < a)$ が存在する

$$g'(c) = 0 \quad \text{すなわち} \quad cf'(c) - f(c) = 0$$

したがって，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(c,\ f(c))$ における接線の方程式は

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \quad \text{すなわち} \quad y = f'(c)x$$

よって，この接線は原点 $(0,\ 0)$ を通る．