令和２年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

$\boxed{1}$ a，b は実数で，$a>0$ とする．z に関する方程式

$$z^3+3az^2+bz+1=0 \qquad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a，b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ．

$\boxed{2}$ p を正の整数とする．α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ．

$\boxed{3}$ k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 正の整数 a に対して，

$$a = 3^b c \quad (b,\ c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．
m，n は整数で，次の条件を満たすとする．

(i) $1 \leqq m \leqq 30$.

(ii) $1 \leqq n \leqq 30$.

(iii) n は 3 で割り切れない．

このような $(m,\ n)$ について

$$f(m,\ n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき，

$$A(m,\ n) = B(f(m,\ n))$$

の最大値を求めよ．また，$A(m,\ n)$ の最大値を与えるような $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

$\boxed{\mathbf{6}}$ x，y，z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．このとき，V の体積を求めよ．

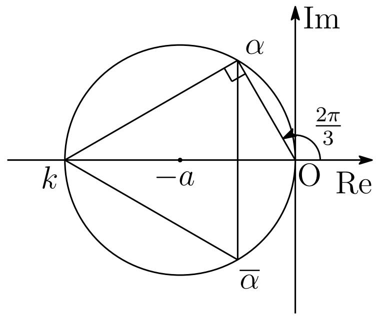
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3次方程式 $z^3+3az^2+bz+1=0$ は実数を係数とするから，その解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ k$ とすると (k は実数)，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}+k=-3a,\quad \alpha\overline{\alpha}+k\alpha+k\overline{\alpha}=b,\quad \alpha\overline{\alpha}k=|\alpha|^2k=-1 \qquad \cdots(**)$$

上の第1式から $\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+k}{3}=-a$ ゆえに 正三角形の重心 (外心) は $-a$

正三角形の一辺の長さが $\sqrt{3}a$ であるから，外接円の半径を R とすると，正弦定理により



$$\frac{\sqrt{3}a}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R \quad \text{ゆえに} \quad R=a$$

三角形の3頂点の1つは実軸上で，他の2頂点は，実軸に対して対称である．実数解 k は中心 $-a$，半径 a の円周上にあり，$(**)$ の第3式に注意すると，$k\neq 0$ であるから

$$k=-2a$$

右の図から，$|\alpha-0|=a$ より，$|\alpha|=a$．これらを $(**)$ の第3式に代入すると

$$a^2\cdot(-2a)=-1 \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad k=-2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{4}$$

$$\arg\alpha=\frac{2\pi}{3} \text{ より} \quad \alpha=a\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\overline{\alpha}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$(**)$ の第2式から
$$\begin{aligned}b&=|\alpha|^2+k(\alpha+\overline{\alpha})\\&=a^2+(-2a)(-a)=3a^2=3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}}$ 解は $\boldsymbol{-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 方程式 $x^2-2px-1=0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2p, \quad \alpha\beta=-1$$

また　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2=2(2p^2+1)$

$q_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくと，p は整数であるから，q_1，q_2 は偶数である．

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ であるから

$$q_{n+2}=2pq_{n+1}+q_n \quad \cdots(*)$$

q_1，q_2 は偶数の整数であるから，$(*)$ より，$\{q_n\}$ は整数である．
さらに，法 2 について

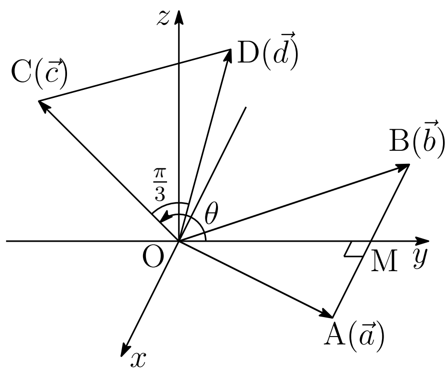
$$q_{n+2}\equiv q_n \pmod 2$$

したがって，$\{q_n\}$ は偶数，すなわち，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数である．

(2) $\alpha\beta=-1$，$|\alpha|>1$ より，$0<|\beta|=\dfrac{1}{|\alpha|}<1$．(1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n\sin\{(\alpha^n+\beta^n)\pi-\beta^n\pi\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(-\beta^n\pi)}{\beta^n}=\lim_{n\to\infty}(-\pi)\cdot\frac{\sin\beta^n\pi}{\beta^n\pi}=\boldsymbol{-\pi}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$



とおくと　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2\\&=1-2\cdot\frac{1}{2}+1=1,\\|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2&=|\vec{d}-\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{c}|^2\\&=1-2\cdot\frac{1}{2}+1=1\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=1$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OCD}$ は，正三角形である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

A，B を xy 平面上の点とすると，C，D は yz 平面上の点である．

辺 AB の中点を M とすると，$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{ゆえに}\quad \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は　$\dfrac{3\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の内積は　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d})=k>0$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は，鋭角であるから　$\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{12}$

よって　$k=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$

別解 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく．

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ より，2 つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ は垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ より

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2\pm 1 \quad (\text{複号同順})$$

直交する 2 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$ を次のようにおく．

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}+\vec{b}), \quad \vec{f}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\vec{a}-\vec{b}$$

$\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}-(\vec{c}\cdot\vec{f})\vec{f}$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ より

$$\begin{aligned}
&\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\
&\vec{c}\cdot\vec{f}=\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0
\end{aligned}$$

したがって，ベクトル $\vec{c}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．

$$\left|\sqrt{2}\vec{c}+\vec{e}\right|^2=2|\vec{c}|^2+2\sqrt{2}\,\vec{c}\cdot\vec{e}+|\vec{e}|^2=2+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1=1$$

$\vec{g}=\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e}$ とおくと，3 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$ は互いに直交する．

$$\begin{aligned}
&\vec{d}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{\sqrt{3}}k, \quad \vec{d}\cdot\vec{f}=\vec{d}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\\
&\vec{d}\cdot\vec{g}=\vec{d}\cdot(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}k
\end{aligned}$$

$\vec{d}=(\vec{d}\cdot\vec{e})\vec{e}+(\vec{d}\cdot\vec{f})\vec{f}+(\vec{d}\cdot\vec{g})\vec{g}$ より　$\vec{d}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\vec{e}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)\vec{g}$

$|\vec{d}|^2=1$ であるから　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2=1$

整理すると　$8k^2+2\sqrt{6}k-\dfrac{3}{2}=0$　これを解いて　$k=\dfrac{-\sqrt{6}\pm 3\sqrt{2}}{8}$

条件より，$k>0$ であるから　$\boldsymbol{k=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 法3について　$m \equiv 0 \Longrightarrow m^3 \equiv 0,\quad m \equiv \pm 1 \Longrightarrow m^3 \equiv \pm 1$　(複号同順)

したがって　$m^3 \equiv 0 \Longleftrightarrow m \equiv 0,\quad m^3 \equiv \pm 1 \Longleftrightarrow m \equiv \pm 1$　(複号同順)

条件より，n は3で割り切れないから　$n \equiv \pm 1 \pmod 3$

- $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$n^2+n+3 \equiv 2 \pmod 3$ である．

$$(*)\quad f(m,\ n) = m^3+n^2+n+3$$

$(*)$ が3で割りれるとき　$m^3 \equiv 1$　すなわち　$m \equiv 1 \pmod 3$

$$f(m,\ n) = (m-1)^3+3(m-1)^2+3(m-1)+(n-1)^2+3(n-1)+6$$

$(m-1)^3$，$3(m-1)^2$ は27で割り切れ，$3(m-1)$，$(n-1)^2$，$3(n-1)$ は9で割り切れる．このとき，$f(m,\ n)$ は3で割り切れるが，3^2 では割り切れない．

- $n \equiv -1 \pmod 3$ のとき，$n^2+n+3 \equiv 0 \pmod 3$ である．

$(*)$ が3で割り切れるとき　$m^3 \equiv 0$　すなわち　$m \equiv 0 \pmod 3$

$(*)$ より　$f(m,\ n) = m^3+(n+1)^2-(n+1)+3 \quad \cdots ①$

m^3 は27で割り切れ，$(n+1)^2$ は9で割り切れる．① が9で割り切れるとき

$$-(n+1)+3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n+1 \equiv 3 \pmod 9$$

$n+1 = 9N+3 \cdots ②$ とおくと (k は整数)

$$\begin{aligned} f(m,\ n) &= m^3+(9N+3)^2-(9N+3)+3 \\ &= m^3+81N^2+9(5N+1) \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

m^3 は27で割り切れ，$81N^2$ は81で割り切れるから，③ が27で割り切れるとき

$$5N+1 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad N \equiv 1 \pmod 3$$

これと ② を $1 \leqq n \leqq 30$ に適用すると　$N=1$，$n=11$

$m=3M$ とおくと (M は整数)，③ は

$$f(m,\ n) = 27M^3+135 = 27(M^3+5)$$

$M^3+5 \equiv 0$，すなわち，$M \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$A(m,\ n)$ は最大値 **4** をとる．
このとき，$\boldsymbol{(m,\ n) = (3,\ 11),\ (12,\ 11),\ (21,\ 11),\ (30,\ 11)}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1 行目に A，B，C，D を固定し，本題の条件を満たすように，2 行目〜4 行目を並べたとき，行ごと入れ替えても，条件は満たされる．そこで，第 2 行第 1 列目から第 4 行第 1 列目までを上から順に，B，C，D とすると，第 2 行第 2 列に配置する文字 X (X = A, C, D) の場合に分けてその総数を求める．

<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td colspan="4">2 行 目</td></tr>
<tr><td colspan="4">3 行 目</td></tr>
<tr><td colspan="4">4 行 目</td></tr>
</table>

A	B	C	D
B	**X**		
C			
D			

第 2 行第 2 列に配置される A，C，D の場合の数は，それぞれ，2, 1, 1 通りある．

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

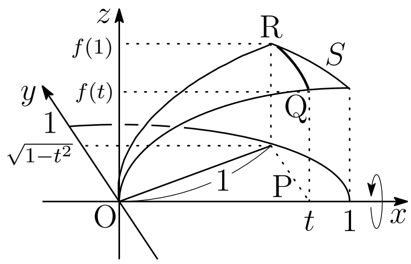
A	B	C	D
B	**C**	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	**D**	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

1，2，3，4 を A，B，C，D に 1 対 1 に対応させる (全単射) 場合の数は 4! 通り．
2 行目〜4 行目までの入れ替えの総数は 3! 通り．これと場合分けの総数により

$$4! \times 3! \times (2+1+1) = \mathbf{576} \ (\text{通り})$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x)=\sqrt{\log(1+x)}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおく．
S の平面 $x=t$ 上に 3 点



$$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Q}(t,\ 0,\ f(t)),$$
$$\mathrm{R}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ f(1))$$

をとると

$$\begin{aligned}\mathrm{PR}^2-\mathrm{PQ}^2 &= \{(\sqrt{1-t^2})^2+f(1)^2\}-f(t)^2 \\ &= 1-t^2+\log 2-\log(1+t)\end{aligned}$$

求める立体の体積 V は，yz 平面に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^1 (\mathrm{PR}^2-\mathrm{PQ}^2)\,dt \\ &= \int_0^1 \{1-t^2+\log 2-\log(1+t)\}\,dt \\ &= \left[2t-\frac{t^3}{3}+t\log 2-(1+t)\log(1+t)\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3}-\log 2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=2\pi\left(\frac{5}{3}-\log 2\right)}$