

令和2年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 a, b は実数で, $a > 0$ とする. z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \quad (*)$$

は3つの相異なる解を持ち, それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする. このとき, a, b と $(*)$ の3つの解を求めよ.

2 p を正の整数とする. α, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の2つの解で, $|\alpha| > 1$ であるとする.

(1) すべての正の整数 n に対し, $\alpha^n + \beta^n$ は整数であり, さらに偶数であることを証明せよ.

(2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$ を求めよ.

3 k を正の実数とする. 座標空間において, 原点 O を中心とする半径1の球面上の4点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている.

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \vec{OC} \cdot \vec{OD} = \frac{1}{2}, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OC} &= \vec{OB} \cdot \vec{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OD} &= \vec{OB} \cdot \vec{OD} = k. \end{aligned}$$

このとき, k の値を求めよ. ただし, 座標空間の点 X, Y に対して, $\vec{OX} \cdot \vec{OY}$ は, \vec{OX} と \vec{OY} の内積を表す.

4 正の整数 a に対して,

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき, $B(a) = b$ と定める. 例えば, $B(3^2 \cdot 5) = 2$ である.
 m, n は整数で, 次の条件を満たすとする.

(i) $1 \leq m \leq 30$.

(ii) $1 \leq n \leq 30$.

(iii) n は 3 で割り切れない.

このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき,

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ. また, $A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ.

5 縦 4 個, 横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく. このマス目の横の並びを行といい, 縦の並びを列という. どの行にも, どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ. 下図はこのような入れ方の 1 例である.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

6 x, y, z を座標とする空間において, xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする. この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき, S が通過した部分よりなる立体を V とする. このとき, V の体積を求めよ.

解答例

- 1 3次方程式 $z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0$ は実数を係数とするから、その解を $\alpha, \bar{\alpha}, k$ とすると (k は実数), 解と係数の関係により

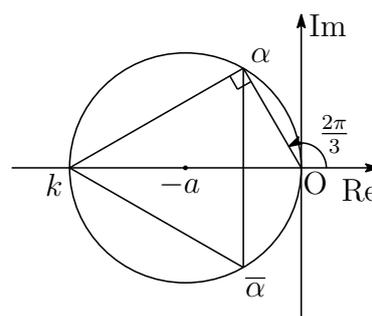
$$\alpha + \bar{\alpha} + k = -3a, \quad \alpha\bar{\alpha} + k\alpha + k\bar{\alpha} = b, \quad \alpha\bar{\alpha}k = |\alpha|^2k = -1 \quad \dots (**)$$

上の第1式から $\frac{\alpha + \bar{\alpha} + k}{3} = -a$ ゆえに 正三角形の重心(外心)は $-a$

正三角形の一辺の長さが $\sqrt{3}a$ であるから、外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\frac{\sqrt{3}a}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R \quad \text{ゆえに} \quad R = a$$

三角形の3頂点の1つは実軸上で、他の2頂点は、実軸に対して対称である。実数解 k は中心 $-a$, 半径 a の円周上にあり、(**)の第3式に注意すると、 $k \neq 0$ であるから



$$k = -2a$$

右の図から、 $|\alpha - 0| = a$ より、 $|\alpha| = a$. これらを(**)の第3式に代入すると

$$a^2 \cdot (-2a) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad k = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{4}$$

$$\begin{aligned} \arg \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ より} \quad \alpha &= a \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ \bar{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (**) \text{ の第2式から} \quad b &= |\alpha|^2 + k(\alpha + \bar{\alpha}) \\ &= a^2 + (-2a)(-a) = 3a^2 = 3 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad b = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \quad \text{解は} \quad -\sqrt[3]{4}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \quad \blacksquare$$

- 2 (1) 方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2p, \quad \alpha\beta = -1$$

$$\text{また } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4p^2 + 2 = 2(2p^2 + 1)$$

$q_n = \alpha^n + \beta^n$ とおくと, p は整数であるから, q_1, q_2 は偶数である.

$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$ であるから

$$q_{n+2} = 2pq_{n+1} + q_n \quad \cdots (*)$$

q_1, q_2 は偶数の整数であるから, (*) より, $\{q_n\}$ は整数である.

さらに, 法 2 について

$$q_{n+2} \equiv q_n \pmod{2}$$

したがって, $\{q_n\}$ は偶数, すなわち, $\alpha^n + \beta^n$ は偶数である.

- (2) $\alpha\beta = -1, |\alpha| > 1$ より, $0 < |\beta| = \frac{1}{|\alpha|} < 1$. (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\beta}\right)^n \sin\{(\alpha^n + \beta^n)\pi - \beta^n \pi\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(-\beta^n \pi)}{\beta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\pi) \cdot \frac{\sin \beta^n \pi}{\beta^n \pi} = -\pi \end{aligned}$$



$$\text{3 } \vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}, \vec{d} = \overrightarrow{OD}$$

$$\text{とおくと } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CD}|^2 &= |\vec{d} - \vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{c}|^2 \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AB}| = 1, |\overrightarrow{CD}| = 1$ より, $\triangle OAB, \triangle OCD$ は, 正三角形である.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = k \text{ より}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \quad \text{ゆえに } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OD}$$

A, B を xy 平面上の点とすると, C, D は yz 平面上の点である.

$$\text{辺 AB の中点を M とすると, } OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

\overrightarrow{OM} と \overrightarrow{OC} のなす角を θ とすると

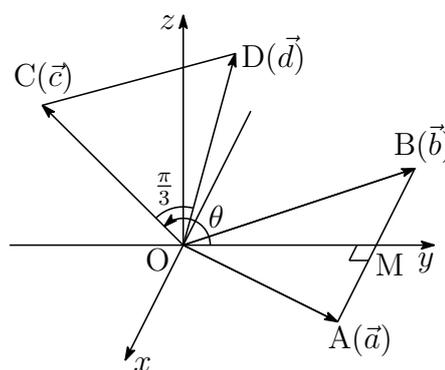
$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OC}|} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\overrightarrow{OM} \text{ と } \overrightarrow{OD} \text{ のなす角は } \frac{3\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{OM} \text{ と } \overrightarrow{OD} \text{ の内積は } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d}) = k > 0$$

$$\overrightarrow{OM} \text{ と } \overrightarrow{OD} \text{ のなす角は, 鋭角であるから } \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{よって } k = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OD}| \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$



別解 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ とおく.

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ より, 2つのベクトル $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ は垂直である. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ より

$$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2 \pm 1 \quad (\text{複号同順})$$

直交する2つの単位ベクトル \vec{e} , \vec{f} を次のようにおく.

$$\vec{e} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \vec{f} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{|\vec{a} - \vec{b}|} = \vec{a} - \vec{b}$$

$\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{e})\vec{e} - (\vec{c} \cdot \vec{f})\vec{f}$ は, \vec{e} および \vec{f} と垂直である. $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ より

$$\vec{c} \cdot \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{f} = \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

したがって, ベクトル $\vec{c} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\vec{c} + \vec{e})$ は, \vec{e} および \vec{f} と垂直である.

$$|\sqrt{2}\vec{c} + \vec{e}|^2 = 2|\vec{c}|^2 + 2\sqrt{2}\vec{c} \cdot \vec{e} + |\vec{e}|^2 = 2 + 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 = 1$$

$\vec{g} = \sqrt{2}\vec{c} + \vec{e}$ とおくと, 3つの単位ベクトル \vec{e} , \vec{f} , \vec{g} は互いに直交する.

$$\vec{d} \cdot \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{d} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{\sqrt{3}}k, \quad \vec{d} \cdot \vec{f} = \vec{d} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0,$$

$$\vec{d} \cdot \vec{g} = \vec{d} \cdot (\sqrt{2}\vec{c} + \vec{e}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}k$$

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{e})\vec{e} + (\vec{d} \cdot \vec{f})\vec{f} + (\vec{d} \cdot \vec{g})\vec{g} \quad \text{より} \quad \vec{d} = \frac{2}{\sqrt{3}}k\vec{e} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}k \right) \vec{g}$$

$$|\vec{d}|^2 = 1 \text{ であるから} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}k \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}k \right)^2 = 1$$

$$\text{整理すると} \quad 8k^2 + 2\sqrt{6}k - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{-\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{条件より, } k > 0 \text{ であるから} \quad k = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} \quad \blacksquare$$

- 4** 法3について $m \equiv 0 \implies m^3 \equiv 0$, $m \equiv \pm 1 \implies m^3 \equiv \pm 1$ (複号同順)
 したがって $m^3 \equiv 0 \iff m \equiv 0$, $m^3 \equiv \pm 1 \iff m \equiv \pm 1$ (複号同順)
 条件より, n は3で割り切れないから $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$

- $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき, $n^2 + n + 3 \equiv 2 \pmod{3}$ である.

$$(*) \quad f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

(*) が3で割りれるとき $m^3 \equiv 1$ すなわち $m \equiv 1 \pmod{3}$

$$f(m, n) = (m-1)^3 + 3(m-1)^2 + 3(m-1) + (n-1)^2 + 3(n-1) + 6$$

$(m-1)^3$, $3(m-1)^2$ は27で割り切れ, $3(m-1)$, $(n-1)^2$, $3(n-1)$ は9で割り切れる. このとき, $f(m, n)$ は3で割り切れるが, 3^2 では割り切れない.

- $n \equiv -1 \pmod{3}$ のとき, $n^2 + n + 3 \equiv 0 \pmod{3}$ である.

(*) が3で割り切れるとき $m^3 \equiv 0$ すなわち $m \equiv 0 \pmod{3}$

(*) より $f(m, n) = m^3 + (n+1)^2 - (n+1) + 3 \dots \textcircled{1}$

m^3 は27で割り切れ, $(n+1)^2$ は9で割り切れる. $\textcircled{1}$ が9で割り切れるとき

$$-(n+1) + 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n+1 \equiv 3 \pmod{9}$$

$n+1 = 9N + 3 \dots \textcircled{2}$ とおくと (k は整数)

$$\begin{aligned} f(m, n) &= m^3 + (9N+3)^2 - (9N+3) + 3 \\ &= m^3 + 81N^2 + 9(5N+1) \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

m^3 は27で割り切れ, $81N^2$ は81で割り切れるから, $\textcircled{3}$ が27で割り切れるとき

$$5N+1 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad N \equiv 1 \pmod{3}$$

これと $\textcircled{2}$ を $1 \leq n \leq 30$ に適用すると $N = 1$, $n = 11$

$m = 3M$ とおくと (M は整数), $\textcircled{3}$ は

$$f(m, n) = 27M^3 + 135 = 27(M^3 + 5)$$

$M^3 + 5 \equiv 0$, すなわち, $M \equiv 1 \pmod{3}$ のとき, $A(m, n)$ は最大値4をとる.
 このとき, $(m, n) = (3, 11), (12, 11), (21, 11), (30, 11)$ ■

- 5 1行目に A, B, C, D を固定し, 本題の条件を満たすように, 2行目~4行目を並べたとき, 行ごとに入れ替えても, 条件は満たされる. そこで, 第2行第1列目から第4行第1列目までを上から順に, B, C, D とすると, 第2行第2列に配置する文字 X ($X = A, C, D$) の場合に分けてその総数を求める.

A	B	C	D
2行目			
3行目			
4行目			

A	B	C	D
B	X		
C			
D			

第2行第2列に配置される A, C, D の場合の数は, それぞれ, 2, 1, 1 通りある.

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	D	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

1, 2, 3, 4 を A, B, C, D に 1対1 に対応させる (全単射) 場合の数は $4!$ 通り. 2行目~4行目までの入れ替えの総数は $3!$ 通り. これと場合分けの総数により

$$4! \times 3! \times (2 + 1 + 1) = 576 \text{ (通り)}$$



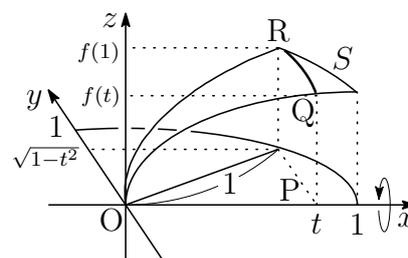
6 $f(x) = \sqrt{\log(1+x)}$ ($0 \leq x \leq 1$) とおく.

S の平面 $x = t$ 上に 3 点

$$P(t, 0, 0), \quad Q(t, 0, f(t)),$$

$$R(t, \sqrt{1-t^2}, f(1))$$

をとると



$$\begin{aligned} PR^2 - PQ^2 &= \{(\sqrt{1-t^2})^2 + f(1)^2\} - f(t)^2 \\ &= 1 - t^2 + \log 2 - \log(1+t) \end{aligned}$$

求める立体の体積 V は, yz 平面に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^1 (PR^2 - PQ^2) dt \\ &= \int_0^1 \{1 - t^2 + \log 2 - \log(1+t)\} dt \\ &= \left[2t - \frac{t^3}{3} + t \log 2 - (1+t) \log(1+t) \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3} - \log 2 \end{aligned}$$

よって $V = 2\pi \left(\frac{5}{3} - \log 2 \right)$ ■