

平成31年度 京都大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間(理系), 経済(理系)

1 次の各問に答えよ.

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. $\cos \theta$ は有理数ではないが, $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ. ただし, p が素数のとき, \sqrt{p} が有理数でないことは証明なしに用いてよい.

(2) 次の定積分の値を求めよ.

(i)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

(ii)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$$

2 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ とする. $|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ.

3 鋭角三角形 ABC を考え, その面積を S とする. $0 < t < 1$ をみたす実数 t に対し, 線分 AC を $t:1-t$ に内分する点を Q, 線分 BQ を $t:1-t$ に内分する点を P とする. 実数 t がこの範囲を動くときに点 P の描く曲線と, 線分 BC によって囲まれる部分の面積を, S を用いて表せ.

4 1つのさいころを n 回続けて投げ, 出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とする. このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ. ただし $X_0 = 0$ としておく.

条件: $1 \leq k \leq n$ をみたす k のうち, $X_{k-1} \leq 4$ かつ $X_k \geq 5$ が成立するような k の値はただ1つである.

5 半径1の球面上の5点 A, B_1, B_2, B_3, B_4 は, 正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面とする四角錐をなしている. この5点が球面上を動くとき, 四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積の最大値を求めよ.

6 i は虚数単位とする. $(1+i)^n + (1-i)^n > 10^{10}$ をみたす最小の正の整数 n を求めよ.

常用対数表は次ページにある.

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで掲載している。

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで掲載している。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3) = \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$$

$2\cos 2\theta - 1 \neq 0$ とすると, 上式より

$$\cos\theta = \frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1}$$

$\cos 2\theta, \cos 3\theta$ が有理数であるから, 右辺は有理数で, 左辺が無理数であることに反する. したがって

$$2\cos 2\theta - 1 = 0$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意して, これを解くと $\theta = \frac{\pi}{6}$

実際 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2\theta = \frac{1}{2}, \cos 3\theta = 0$ よって $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$(2) \quad (i) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)' dx = \left[x \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\log \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$$

$$(ii) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \log(\sqrt{2} + 1)$$

$\boxed{2}$ n と $n+1$ の一方は, 偶数であるから, それを $2k$ とすると (k は整数)

$$f(2k) = (2k)^3 + 2(2k)^2 + 2 = 2(4k^3 + 4k^2 + 1)$$

$|f(2k)|$ が素数であるとき $4k^3 + 4k^2 + 1 = \pm 1$

ゆえに $k^2(k+1) = 0$ または $2k^2(k+1) + 1 = 0$ すなわち $k = -1, 0$

したがって, $k \leq -2, 1 \leq k$ の場合は $|f(2k)|$ は合成数である.

これより, 次を調べればよい.

n	-3	-2	-1	0	1
$ f(n) $	7	2	3	2	5

よって $n = -3, -2, -1, 0$

- 3 (1) 座標平面上に3点 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ をとる ($a > 0, b < 0 < c$). 線分 AC を $t : 1 - t$ に内分する点 Q の位置ベクトルは

$$\vec{OQ} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OC}$$

したがって、線分 BQ を $t : 1 - t$ に内分する点 P の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-t)\vec{OB} + t\vec{OQ} = (1-t)\vec{OB} + t\{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OC}\} \\ &= t(1-t)\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} + t^2\vec{OC}\end{aligned}$$

$P(x, y)$ とすると, $\vec{OA} = (0, a)$, $\vec{OB} = (b, 0)$, $\vec{OC} = (c, 0)$ より

$$x = b(1-t) + ct^2, \quad y = at(1-t)$$

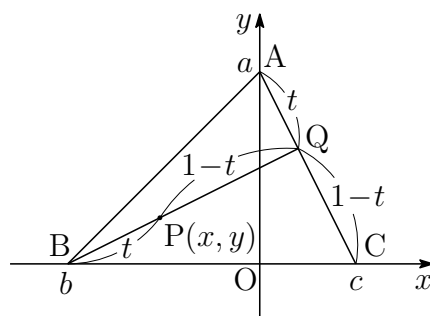
このとき $\begin{array}{|c|c|} \hline t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline x & b \rightarrow c \\ \hline \end{array} \quad y \geq 0, \quad \frac{dx}{dt} = -b + 2ct$

$S = \frac{1}{2}(c-b)a$ に注意すると、点 P と線分 BC で囲まれる部分の面積は、

$$\begin{aligned}\int_b^c y dx &= \int_0^1 y \frac{dx}{dt} dt = \int_0^1 at(1-t)(-b + 2ct) dt \\ &= -ab \int_0^1 t(1-t) dt + 2ac \int_0^1 t^2(1-t) dt \\ &= -ab \cdot \frac{1}{6} + 2ac \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}(c-b)a \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(c-b)a = \frac{1}{3}S\end{aligned}$$

- 4 連続して i 回 4 以下の事象を A_i , 連続して j 回 5 以上の事象を B_j とすると, $A_i B_j A_k$ の順に起きる確率であるから ($i, k \geq 0, j \geq 1, i + j + k = n$)

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i, k \geq 0, j \geq 1, \\ i + j + k = n}} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{\substack{i \geq 0, k \geq 0, \\ i + k \leq n-1}} \frac{2^{i+k}}{3^n} = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^i \\ &= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (2^{n-k} - 1) = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) \\ &= \frac{1}{3^n} \{n \cdot 2^n - (2^n - 1)\} = \frac{(n-1) \cdot 2^n + 1}{3^n}\end{aligned}$$



- 5 原点 O を中心とする球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上に 4 点 $(\pm a, \pm a, b)$ および点 $(0, 0, 1)$ の 5 点を頂点する四角錐の体積 V とすると ($a > 0$)

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad V = \frac{1}{3}(2a)^2(1-b) = \frac{4}{3}a^2(1-b)$$

$$a \text{ を消去すると } V = \frac{2}{3}(1-b^2)(1-b) = \frac{2}{3}(1+b)(1-b)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$-1 < b < 1$ であるから、3 正数 $2(1+b)$, $1-b$, $1-b$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2(1+b) + (1-b) + (1-b)}{3} \geq \sqrt[3]{2(1+b)(1-b)^2}$$

$$\text{したがって } (1+b)(1-b)^2 \leq \frac{32}{27} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ で等号が成立するとき } 2(1+b) = 1-b \quad \text{すなわち } b = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } V \leq \frac{64}{81} \quad \text{よって, 最大値は } \frac{64}{81}$$

- 6 $1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ より (復号同順)

$$\begin{aligned} (1+i)^n + (1-i)^n &= (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ &= 2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} > 10^{10} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$$\cos \frac{n\pi}{4} > 0 \text{ を満たす } n \text{ は } n \equiv 0, \pm 1 \pmod{8}$$

$$(i) \ n = 8k \text{ のとき, } (*) \text{ は } 2(\sqrt{2})^{8k} > 10^{10} \quad \text{ゆえに } 2^{4k+1} > 10^{10}$$

$$4k+1 > \frac{10}{\log_{10} 2} \quad \text{ゆえに } k > \frac{5}{\log_{10} 4} - 0.25$$

$$(ii) \ n = 8k \pm 1 \text{ のとき, } (*) \text{ は } 2(\sqrt{2})^{8k \pm 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > 10^{10} \quad \text{ゆえに } 2^{\frac{8k+1 \pm 1}{2}} > 10^{10}$$

$$\frac{8k+1 \pm 1}{2} > \frac{10}{\log_{10} 2} \quad \text{ゆえに } k > \frac{5}{\log_{10} 4} - \frac{1 \pm 1}{8}$$

常用対数表により、 $0.60205 \leq \log_{10} 4 < 0.60215$ であるから、(i), (ii) において

$$\frac{5}{\log_{10} 4} > \frac{5}{0.60215} > 8.3, \quad 0 \geq -\frac{1 \pm 1}{8} \geq -0.25 \quad \text{ゆえに } k \geq 9$$

したがって、 $n \geq 8 \cdot 9 - 1 = 71$ よって、求める最小の整数 n は **71**