平成 30 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

1 0 でない実数 a，b，c は次の条件 (i) と (ii) を満たしながら動くものとする．

(i) $1+c^2 \leqq 2a$.

(ii) 2 つの放物線 $C_1 : y=ax^2$ と $C_2 : y=b(x-1)^2+c$ は接している．

ただし，2 つの曲線が接するとは，ある共有点において共通の接線をもつことであり，その共有点を接点という．

(1) C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ．

(2) C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め，その範囲を図示せよ．

2 n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

3 α は $0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える．

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する．

(ii) $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha$.

条件 (i) と (ii) を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積

$$k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$$

が最大となるものについて，k の値を求めよ．

4 コインを n 回投げて複素数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n を次のように定める．

(i) 1 回目に表が出れば $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とし，裏が出れば $z_1=1$ とする．

(ii) $k=2,3,\cdots,n$ のとき，k 回目に表が出れば $z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k=\overline{z_{k-1}}$ とする．ただし，$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である．

このとき，$z_n=1$ となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 曲線 $y = \log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における法線上に，点 B を $\mathrm{AB} = 1$ となるようにとる．ただし B の x 座標は t より大きいとする．

(1) 点 B の座標 $(u(t),\ v(t))$ を求めよ．また $\left(\dfrac{du}{dt},\ \dfrac{dv}{dt}\right)$ を求めよ．

(2) 実数 r は $0 < r < 1$ を満たすとし，t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r)$，$L_2(r)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{r\to+0}(L_1(r) - L_2(r))$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 四面体 ABCD は $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$，$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする．

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=ax^2$，$g(x)=b(x-1)^2+c$ とおくと

$$f'(x)=2ax,\quad g'(x)=2b(x-1)$$

C_1，C_2 の共有点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ より

$$(*)\begin{cases} at^2=b(t-1)^2+c \\ 2at=2b(t-1) \end{cases}$$

$(*)$ の第 2 式から　$at=b(t-1)$　$\cdots$①

$a\neq 0$，$b\neq 0$ であるから，① より　$t\neq 0,\ 1$

① と $(*)$ の第 1 式から b を消去すると

$$at^2=at(t-1)+c\quad \text{ゆえに}\quad t=\frac{c}{a}$$

したがって　$f\left(\dfrac{c}{a}\right)=a\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=\dfrac{c^2}{a}$　よって，接点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{c}{a},\ \dfrac{c^2}{a}\right)}$

(2) (1) の結果から，接点の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{c}{a},\ \ y=\frac{c^2}{a}\quad (x\neq 0,\ 1)$$

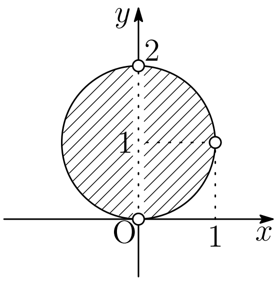
上の 2 式から　$a=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2\dfrac{c^2}{a}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2y=\dfrac{y}{x^2}$，　$c=\dfrac{c^2}{a}\cdot\dfrac{a}{c}=y\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{x}$

これらを $1+c^2\leqq 2a$ に代入すると

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\leqq 2\cdot\frac{y}{x^2}$$

よって　$x^2+(y-1)^2\leqq 1$　$(x\neq 0,\ 1)$

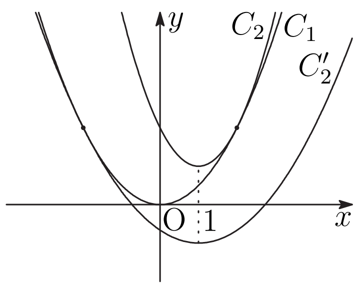
この不等式の表す領域は，右の図の斜線部分で，y 軸および点 $(1,\ 1)$ は含まない．



補足 右の図から，C_1 と C_2 の接点の x 座標は

$$x\neq 0,\ 1$$

であることがわかる．



別解 $1+c^2 \leqq 2a$ より，$a>0$ であるから，$k=\dfrac{1+c^2}{2a}$ とおくと　$0<k\leqq 1$

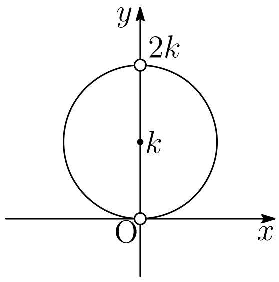
接点の座標を $(x,\ y)$ とおくと，(1) の結果から

$$x=\frac{c}{a}=\frac{2kc}{1+c^2},\quad y=\frac{c^2}{a}=\frac{2kc^2}{1+c^2}$$

$c\neq 0$ であるから，$c=\tan\theta\ (-\frac{\pi}{2}<\theta<0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと

$$x=k\sin 2\theta,\quad y=k(1-\cos 2\theta)$$

これは，右の図のように，y 軸上の点を除く，中心 $(0,\ k)$，半径 k の円である．接点の x 座標は，$x\neq 0,\ 1$ であるから，k が $0<k\leqq 1$ の範囲を動くとき，(2) で求めた図形が得られる．



2 与えらえた整式を変形すると

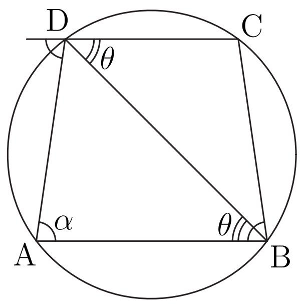
$$n^3-7n+9=(n-1)n(n+1)-3(2n-3)\quad\cdots(*)$$

連続する 3 整数の積 $(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数であるから，$(*)$ は 3 の倍数である．これが素数であるとき，その値は 3 であるから

$$n^3-7n+9=3\quad ゆえに\quad (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

よって，求める整数 n は　　$\boldsymbol{n=1,\ 2, -3}$

3 $\theta=\angle\mathrm{ABD}$ とおくと



$$\angle\mathrm{DBC}=\alpha-\theta,\ \angle\mathrm{ADB}=\pi-\alpha-\theta$$

外接円の半径が 1 であるから，正弦定理により

$$\mathrm{AB}=2\sin(\pi-\alpha-\theta)=2\sin(\alpha+\theta),$$
$$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=2\sin\theta,$$
$$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-\theta)$$

したがって　$k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}=16\sin^2\theta\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)$

$$=8\sin^2\theta(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)=16\sin^2\theta(-\sin^2\theta+\sin^2\alpha)$$

$$=-16\left(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2+4\sin^4\alpha$$

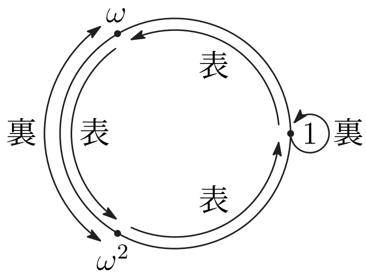
よって，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$ のとき，k は最大値 $\boldsymbol{4\sin^4\alpha}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を自然数，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると　$z_n \in \{1,\ \omega,\ \omega^2\}$

$z_n = 1$，$z_n = \omega$，$z_n = \omega^2$ となる確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1 = \frac{1}{2},\ q_1 = \frac{1}{2},\ r_1 = 0$$

$$(*)\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = q_n \end{cases}$$



$(*)$ の第 1 式と第 2 式から

$$p_{n+1} - q_{n+1} = 0, \quad p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + r_n$$

このとき，$p_n = q_n$ であるから，$p_n + q_n + r_n = 1$ により　$r_n = 1 - 2p_n$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

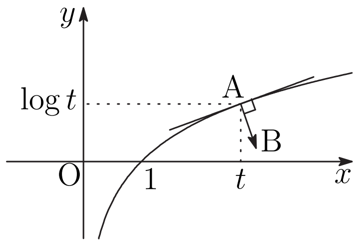
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}(1-2p_n) \quad \text{ゆえに} \quad p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項が $p_1 - \dfrac{1}{3}$，公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

$\boxed{5}$ (1) $y=\log x$ より　$y'=\dfrac{1}{x}$



曲線 $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における接線の傾きが $\dfrac{1}{t}$ であるから，この曲線の点 A における法線の傾きは $-t$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ はベクトル $(1,-t)$ に平行である．

$\mathrm{AB}=1$ で，B の x 座標は A の x 座標 t より大きいから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,-t)$$

よって
$$\begin{aligned}(u(t),\ v(t))&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(t,\ \log t)+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,-t)\\&=\boldsymbol{\left(t+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \log t-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)}\end{aligned}$$

上式から
$$\boldsymbol{\left(\frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right)=\left(1-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

(2) $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ より，$\dfrac{d}{dt}\log t=\dfrac{1}{t}$ であるから

$$L_1(r)=\int_r^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$$

(1) の結果から
$$\left(\frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right)=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(t,\ 1)$$

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{t^2+1}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}-\frac{1}{1+t^2}$$

$$L_2(r)=\int_r^1\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

したがって
$$L_1(r)-L_2(r)=\int_r^1\frac{dt}{1+t^2}$$

$t=\tan\varphi$ とおくと，$t\to+0$ のとき，$\varphi\to+0$ に注意して

$$\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

補足 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt$ について，$t=\dfrac{1}{u}$ とおくと

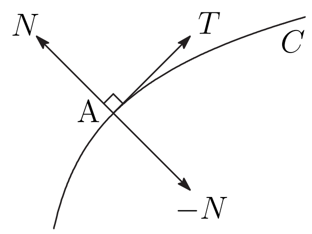
$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt &= \int\sqrt{1+u^2}\left(\frac{1}{u}\right)'du\\ &= \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}-\int\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}-\log(u+\sqrt{1+u^2})+C\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt=\sqrt{1+t^2}-\log\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)+C$

これから，$L_1(r)$ および $L_2(r)$ を求めることもできるが，本題では不要．

発展 本題では曲線の曲率 κ が[1]，$|\kappa|<1$ となる曲線 $C: y=f(x)$ を設定している．
C の弧長

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$



を変数とし，C 上の点 X を $X(s)=(x(s),\ y(s))$ で
定めると $X'(s)=(x'(s),\ y'(s))$

$$s-s_0=\int_{s_0}^{s}|X'(s)|\,ds \qquad \left(|X'(s)|=\sqrt{\{x'(s)\}^2+\{y'(s)\}^2}\right)$$

これを s で微分することにより $|X'(s)|=1$

$T=X'(s)$ とおくと，T は $\mathrm{A}(x(s),\ y(s))$ における C の単位接ベクトルである．
また，T を反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転されたベクトル

$$N=(-y'(s),\ x'(s)) \tag{1}$$

を単位法ベクトルという．

$|X'(s)|^2=1$ より $\{x'(s)\}^2+\{y'(s)\}^2=1 \quad \cdots(*)$

これを s で微分すると

$$2x'(s)x''(s)+2y'(s)y''(s)=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x''(s),\ y''(s))\perp T$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{3}$ を参照

したがって，実数κを用いて

$$(x''(s),\ y''(s)) = \kappa N = \kappa(-y'(s),\ x'(s)) \tag{2}$$

これと$(*)$から　　$\kappa = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$

Tのx軸の正の向きとなす角をθとすると　$\tan\theta = \dfrac{y'(s)}{x'(s)}$

これをsで微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{\{x'(s)\}^2}$$

ここで　　$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left\{\dfrac{y'(s)}{x'(s)}\right\}^2 = \dfrac{1}{\{x'(s)\}^2}$

よって　　$\kappa = \dfrac{d\theta}{ds} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$

また，(1)をsで微分すると，(2)に注意して

$$N' = (-y''(s),\ x''(s)) = (-\kappa x'(x), -\kappa y'(s)) = -\kappa T$$

本題において，点Aが$X(s)$であるとき，点Bは$X(s) - N$である．

$$\frac{d}{ds}\left(X(s) - N\right) = X'(s) - N' = T + \kappa T = (1+\kappa)T$$

曲線$y = \log x$の曲率κは

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$1+\kappa > 0$であるから　$|(1+\kappa)T| = 1+\kappa$

$r \to +0$のとき $\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$，$x = 1$のとき $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+0}(L_1(r) - L_2(r)) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \{1 - (1+\kappa)\}\,ds \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-\kappa)\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\triangle$ACD と $\triangle$BDC について

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD},\ \mathrm{AD} = \mathrm{BC},\ \mathrm{CD}\text{ は共通}$$

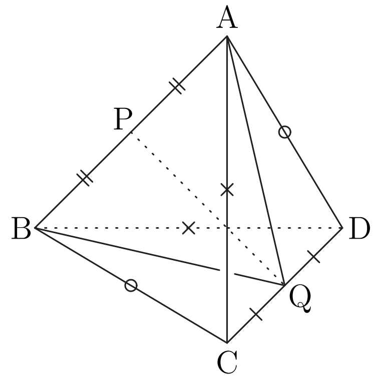
3辺相等により　$\triangle\mathrm{ACD} \equiv \triangle\mathrm{BDC}$

したがって　$\angle\mathrm{ACQ} = \angle\mathrm{BDQ}$

$\triangle$ACQ と $\triangle$BDQ について，2辺夾角相等により　$\triangle\mathrm{ACQ} \equiv \triangle\mathrm{BDQ}$

したがって　$\mathrm{AQ} = \mathrm{BQ}$

よって，PQ は二等辺三角形 ABQ の中線であるから　$\mathrm{AB} \perp \mathrm{PQ}$



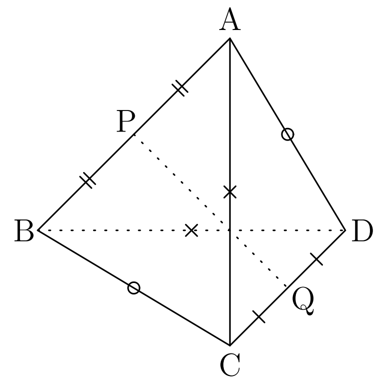
別解

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0}$ に注意して，上の2式の辺々を加えて2倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}$$



したがって

$$\begin{aligned}
4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}}) \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \quad \text{よって} \quad \mathrm{AB} \perp \mathrm{PQ}$$

補足 同様にして

$$\begin{aligned}
4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} + (\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \quad \text{よって} \quad \mathrm{CD} \perp \mathrm{PQ}$$

(2) $\triangle$ABC と $\triangle$ABD について

$\quad$ AC $=$ BD，BC $=$ AD，AB は共通

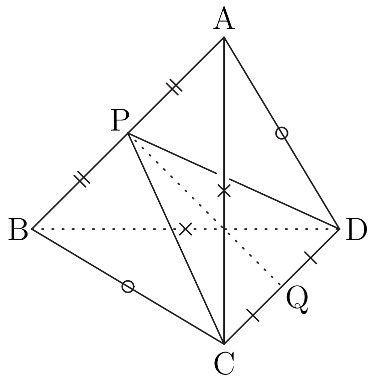
3 辺相等により　$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$BAD

したがって　$\angle$CAP $=$ $\angle$DBP

$\triangle$CAP と $\triangle$DBP について，2 辺夾角相等により　$\triangle$CAP $\equiv$ $\triangle$DBP

したがって　CP $=$ DP

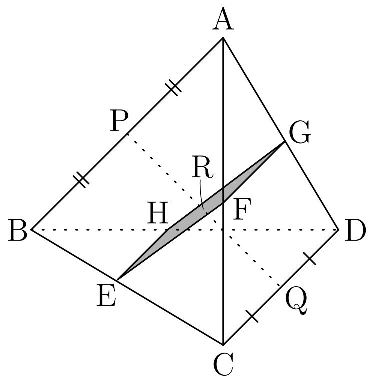
よって，PQ は二等辺三角形 CDP の中線であるから　CD$\perp$PQ

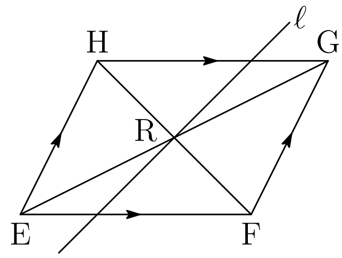


線分 PQ 上に点 R とり，R を通り線分 PQ に垂直な平面と辺 BC，AC，AD，BD との交点を，それぞれ，E，F，G，H とすると

$$\text{BA}/\!/\text{EF},\quad \text{BA}/\!/\text{HG},\quad \text{CD}/\!/\text{EH},\quad \text{CD}/\!/\text{FG}$$

ゆえに　EF//HG，EH//FG　 すなわち　四角形 EFGH は平行四辺形





PQ を含む平面 α と平行四辺形 EFGH との交線を ℓ とすると，ℓ によって平行四辺形 EFGH の面積は二等分される．

よって，α によって，四面体 ABCD の体積は二等分される．