平成29年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

1 w を0でない複素数，x，y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする．

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする．w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

2 四面体OABCを考える．点D，E，F，G，H，Iは，それぞれ辺OA，AB，BC，CO，OB，AC上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$ であることを示せ．

(2) D，E，F，G，H，Iが正八面体の頂点となっているとき，これらの点はOABCの各辺の中点であり，OABCは正四面体であることを示せ．

3 p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha=\frac{1}{p},\quad \tan\beta=\frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha+2\beta)=2$$

を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

4 $\triangle$ABCは鋭角三角形であり，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする．また $\triangle$ABCの外接円の半径は1であるとする．

(1) $\triangle$ABCの内心をPとするとき，$\angle$BPCを求めよ．

(2) $\triangle$ABCの内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ．

5 $a\geqq 0$ とする．$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y=xe^{-x}$，直線 $y=ax$，直線 $x=\sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

(ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち2つ以上で囲まれた部分を意味するものとする．)

6 n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ の5種類のカードがそれぞれ1枚ずつ計5枚入っている．各々の箱から1枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が3で割り切れる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\theta = \arg w$ とすると，$R = |w|$ より

$$w = R(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{R}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$x + yi = w + \dfrac{1}{w}$ より

$$x = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\theta, \quad y = \left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\theta \qquad \cdots(*)$$

$R > 1$ より，$R + \dfrac{1}{R} \neq 0$，$R - \dfrac{1}{R} \neq 0$ であるから

$$\frac{x}{R + \dfrac{1}{R}} = \cos\theta, \quad \frac{y}{R - \dfrac{1}{R}} = \sin\theta$$

上の 2 式から，θ を消去することにより，求める軌跡は，次の楕円である．

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{\left(R + \dfrac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R - \dfrac{1}{R}\right)^2} = 1}$$

(2) $r = |w|$ とすると，$\alpha = \arg w$ より，$(*)$ と同様に

$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha, \quad y = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\alpha \neq 0$，$\sin\alpha \neq 0$ より

$$\frac{x}{\cos\alpha} = r + \frac{1}{r}, \quad \frac{y}{\sin\alpha} = r - \frac{1}{r} \qquad \cdots(**)$$

$(**)$ の第 1 式から

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 + 2 \geqq 2$$

$(**)$ の 2 式から，r を消去すると

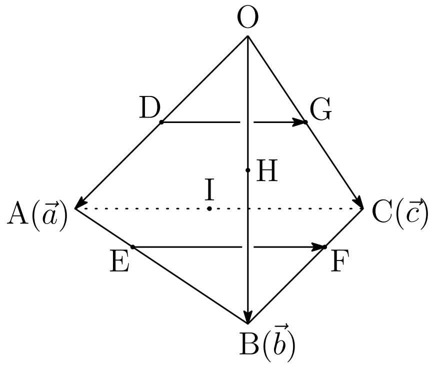
$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin\alpha}\right)^2 = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 4$$

したがって，求める軌跡は，次の双曲線の一部である．

$$\boldsymbol{\left(\frac{x}{2\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{2\sin\alpha}\right)^2 = 1 \qquad (x \geqq 2\cos\alpha)}$$

2 (1) $0 < d, e, f, g < 1$ とし

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = d\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} = g\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = e\vec{a} + (1-e)\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = f\vec{c} + (1-f)\vec{b}$$



とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}} = -d\vec{a} + g\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -e\vec{a} + (e-f)\vec{b} + f\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ であるから (k は 0 でない定数)

$$-e\vec{a} + (e-f)\vec{b} + f\vec{c} = k(-d\vec{a} + g\vec{c})$$

整理すると　$(kd-e)\vec{a} + (e-f)\vec{b} + (f-kg)\vec{c} = \vec{0} \quad \cdots(*)$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$kd - e = 0, \quad e - f = 0, \quad f - kg = 0 \quad \text{すなわち} \quad d = g, \ e = f$$

$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 - e : e$，$\mathrm{CF} : \mathrm{FB} = 1 - f : f$ であるから，$e = f$ より

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = \mathrm{CF} : \mathrm{FB}$$

(2) 条件を満たすとき，$(*)$ に $k = 1$ を代入して (辺 AC に注目)

$$d = e = f = g$$

したがって　$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = \mathrm{CF} : \mathrm{FB} = \mathrm{AD} : \mathrm{DO} = \mathrm{CG} : \mathrm{GO} \quad \cdots ①$

また，同様に，$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{IF}}$ より (辺 AB に注目)

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DO} = \mathrm{BH} : \mathrm{HO} = \mathrm{AI} : \mathrm{IC} = \mathrm{BF} : \mathrm{FC} \quad \cdots ②$$

① より　$\mathrm{CF} : \mathrm{FB} = \mathrm{AD} : \mathrm{DO}$，　② より　$\mathrm{AD} : \mathrm{DO} = \mathrm{BF} : \mathrm{FC}$

上の 2 式より，$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = 1 : 1$ である．

したがって，①，② より，D，E，F，G，H，I は各辺の中点である．

中点連結定理により　$\mathrm{OA} = 2\mathrm{HE}, \ \mathrm{OB} = 2\mathrm{DE}, \ \mathrm{OC} = 2\mathrm{HF},$

$\mathrm{AB} = 2\mathrm{DH}, \ \mathrm{BC} = 2\mathrm{HG}, \ \mathrm{CA} = 2\mathrm{GD}$

このとき，これらの辺の長さは等しいので，OABC は正四面体である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ より，$q=1$ のとき，$\beta = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数) であるから

$$\tan(\alpha+2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -p\ (\neq 2)$$

したがって　$q \neq 1$

$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ $(q \neq 1)$ より　$\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q^2}} = \dfrac{2q}{q^2-1}$

正接の加法定理により

$$\tan\alpha = \tan\{(\alpha+2\beta)-2\beta\} = \frac{\tan(\alpha+2\beta)-\tan 2\beta}{1+\tan(\alpha+2\beta)\tan 2\beta}$$

条件により　$\dfrac{1}{p} = \dfrac{2-\frac{2q}{q^2-1}}{1+2\cdot\frac{2q}{q^2-1}} = \dfrac{2(q^2-q-1)}{q^2+4q-1}$　ゆえに　$2p-1 = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$

$2p-1$ は正の奇数，$q^2-q-1 = q(q-2)+q-1 > 0$ より $(q \geqq 2)$

$$\frac{5q}{q^2-q-1} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2-6q-1 \leqq 0$$

したがって　$|q-3| \leqq \sqrt{10}$

これを満たす自然数 q は　$q = 2, 3, 4, 5, 6$

ここで，$f(q) = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$ とすると

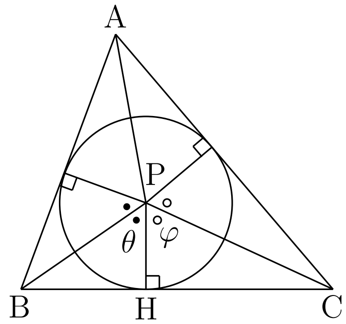
$$f(2) = 10,\quad f(3) = 3,\quad f(4) = \frac{20}{11},\quad f(5) = \frac{25}{19},\quad f(6) = \frac{30}{29}$$

よって，条件を満たすのは，$q=3$ のとき

$$2p-1 = 3 \quad \text{これを解いて} \quad p = 2$$

よって，求める組は　$\boldsymbol{(p,\ q) = (2,\ 3)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 内心Pから辺BCに垂線PHを引き，$\angle\mathrm{BPH}=\theta$，$\angle\mathrm{CPH}=\varphi$とすると



$$\angle\mathrm{B}=\pi-2\theta,\quad \angle\mathrm{C}=\pi-2\varphi \quad \cdots ①$$

$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$であるから，$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=\pi$より

$$\frac{\pi}{3}+(\pi-2\theta)+(\pi-2\varphi)=\pi$$

したがって　$\theta+\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$　よって　$\angle\mathrm{BPC}=\theta+\varphi=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$に正弦定理$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$を適用すると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\cdot1 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{BC}=\sqrt{3}$$

$r=\mathrm{PH}$であるから，$\mathrm{BH}=r\tan\theta$，$\mathrm{HC}=r\tan\varphi$，$\mathrm{BH}+\mathrm{HC}=\mathrm{BC}$より

$$\begin{aligned} r\tan\theta+r\tan\varphi&=\sqrt{3}\\ r(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi)&=\sqrt{3}\cos\theta\cos\varphi\\ r\sin(\theta+\varphi)&=\frac{\sqrt{3}}{2}\{\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)\}\end{aligned}$$

これに(1)の結果を代入すると

$$\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{-\frac{1}{2}+\cos(\theta-\varphi)\right\} \quad \text{ゆえに} \quad r=\cos(\theta-\varphi)-\frac{1}{2}$$

$\varphi=\dfrac{2}{3}\pi-\theta$であるから　$r=\cos\left(2\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)-\dfrac{1}{2}$　$\cdots(*)$

①より　$\angle\mathrm{C}=\pi-2\varphi=\pi-2\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)=2\theta-\dfrac{\pi}{3}$

$\triangle\mathrm{ABC}$は，鋭角三角形であるから，$\angle\mathrm{B}$，$\angle\mathrm{C}$について

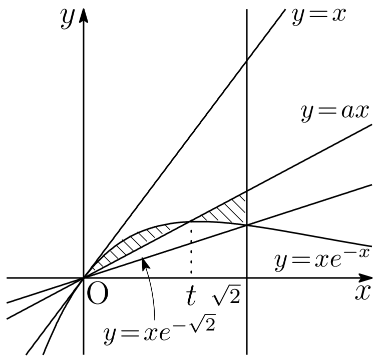
$$0<\pi-2\theta<\frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad 0<2\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{5}{12}\pi$　ゆえに　$-\dfrac{\pi}{6}<2\theta-\dfrac{2}{3}\pi<\dfrac{\pi}{6}$　$\cdots(**)$

$(*)$，$(**)$より　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\dfrac{1}{2}}$

5 $y = xe^{-x}$ より，$y' = (1-x)e^{-x}$，$y'' = (x-2)e^{-x}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	0	↗	極大	↘	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$



$y = xe^{-x}$ のグラフは，右の図のようなる．

$x = 0$ のとき，$y' = 1$ であるから，曲線 $y = xe^{-x}$ 上の原点 O における接線の傾きは　1

曲線 $y = xe^{-x}$ と直線 $x = \sqrt{2}$ の交点は $(\sqrt{2}, \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$ であるから，原点とこの交点を通る直線の傾きは　$e^{-\sqrt{2}}$

上の図から，$0 \leqq a < e^{-\sqrt{2}}$ のとき，$S(a)$ は単調減少である．$1 < a$ のとき，$S(a)$ は単調増加である．したがって，これらの区間においては，$S(a)$ は最小値をもたないので，$e^{-\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ において，$S(a)$ の最小値を求めればよい．

曲線 $y = xe^{-x}$ と直線 $y = ax$ の交点の x 座標を t とすると $(0 < t < \sqrt{2})$

$$te^{-t} = at \quad \text{すなわち} \quad a = e^{-t}\ (t = -\log a)$$

関数 $f(x) = xe^{-x} - ax$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -(x+1)e^{-x} - \dfrac{a}{2}x^2$ とすると

$$S(a) = \int_0^t f(x)\,dx - \int_t^{\sqrt{2}} f(x)\,dx = 2F(t) - F(0) - F(\sqrt{2})$$

このとき　$F(t) = -(t+1)e^{-t} - \dfrac{a}{2}t^2 = -\left(\dfrac{t^2}{2} + t + 1\right)e^{-t}$,　$F(0) = -1$,

$F(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} - a = -e^{-t} - (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$

したがって　　$S(a) = -(t+1)^2e^{-t} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$

$S(a) = g(t)$ とすると　　$g'(t) = (t+1)(t-1)e^{-t}$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘	極小	↗	

よって，$t = 1$，すなわち，$a = e^{-1}$ のとき，$S(a)$ は最小となる．

最小値 $S(e^{-1}) = g(1) = \boldsymbol{-4e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1}$

$\boxed{\textbf{6}}$ n 桁の数 X が，3 で割り切れる確率を a_n，3 で割って 1 余る確率を b_n，3 で割って 2 余る確率を c_n とすると，次の確率漸化式が成り立つ．

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n, \\ b_{n+1} &= \frac{2}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}c_n, \\ c_{n+1} &= \frac{2}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n, \\ a_1 &= \frac{1}{5},\ b_1 = \frac{2}{5},\ c_1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

第 1 式から第 3 式の辺々を加えると　$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

ゆえに　　$a_n + b_n + c_n = a_1 + b_1 + c_1 = 1$

$b_n + c_n = 1 - a_n$ であるから，第 1 式は

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(b_n + c_n) = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(1 - a_n) = -\frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}$$

したがって　　$a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{5}\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1 - \dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(a_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

よって，求める確率は　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n}$

補足 第 2 式および第 3 式から

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(a_n + c_n) = \frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}(1 - b_n) = -\frac{1}{5}b_n + \frac{2}{5}, \\ c_{n+1} &= \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}(a_n + b_n) = \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}(1 - c_n) = -\frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

同様にして　　$b_n = c_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$