平成 28 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) n を 2 以上の自然数とするとき，関数

$$f_n(\theta) = (1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{2}}$ 素数 p，q を用いて $p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{3}}$ 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は
対面の外心を通る．

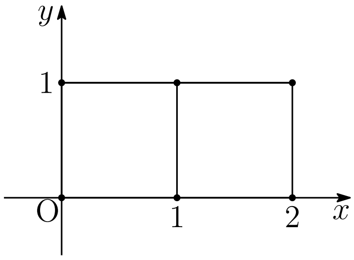
ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

$\boxed{\textbf{4}}$ xyz 空間において，平面 $y = z$ の中で

$$|x| \leqq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leqq y \leqq \log a$$

で与えられる図形 D を考える．ただし a は 1 より大きい定数とする．この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ xy 平面上の 6 個の点 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている．動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する．



規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する．

例えば，X が $(2,\ 0)$ にいるときは，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．また X が $(1,\ 1)$ にいるときは，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．時刻 0 で動点 X が $\mathrm{O} = (0,\ 0)$ から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ．ただし n は 0 以上の整数とする．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 複素数を係数とする2次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し，次の条件を考える．

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる．

(ロ) $f(x)$ の係数 a，b の少なくとも一方は虚数である．

この2つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす2次式をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$f_n(\theta) = (1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta = (1+\cos\theta)(1-\cos^2\theta)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$= (1+\cos\theta)^{\frac{n+1}{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{n-1}{2}}$$

$x=\cos\theta$，$g_n(x)=f_n(\theta)$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$$g_n(x) = (1+x)^{\frac{n+1}{2}}(1-x)^{\frac{n-1}{2}} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

両辺の自然対数をとって微分すると

$$\frac{g_n'(x)}{g_n(x)} = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$$
$$= \frac{(n+1)(1-x)-(n-1)(1+x)}{2(1+x)(1-x)} = \frac{1-nx}{(1+x)(1-x)}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	1
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって $\quad M_n = g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \boldsymbol{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$

(2) (1) の結果から

$$M_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$(M_n)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(M_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{e^{\frac{1}{2}}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 素数 p，q の偶奇が一致するならば，p^q+q^p は 2 でない偶数となるから，p^q+q^p が素数であるとき，p と q の偶奇は異なる．すなわち，p^q+q^p が素数であるとき，素数 p，q の一方は 2 であるから

$$p^2+2^p \text{ が素数} \ (p \text{ は奇素数}) \quad \cdots (*)$$

を求めればよい．

(i) $p=3$ のとき，$3^2+2^3=17$ は，$(*)$ を満たす

(ii) $p \geqq 5$，$p \equiv \pm 1 \pmod 3$ のとき

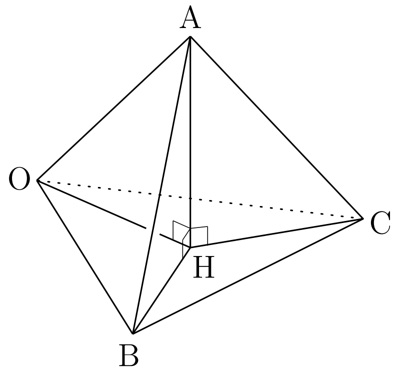
$$p^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1, \quad 2^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod 3$$

したがって　$p^2+2^p \equiv 1+(-1) \equiv 0 \pmod 3$

このとき，$(*)$ を満たす素数 p は存在しない．

(i)，(ii) より，求める素数は　**17**

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$OBC の外心を H とすると



$$\mathrm{HO}=\mathrm{HB}=\mathrm{HC}$$

A から $\triangle$OBC に下ろした垂線が H を通るから

$$\mathrm{AH}^2+\mathrm{HO}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HC}^2$$

ゆえに　$\mathrm{AO}^2=\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2$

同様に，B，C から対面に下ろした垂線により

$$\mathrm{BO}^2=\mathrm{BC}^2=\mathrm{BA}^2,$$
$$\mathrm{CO}^2=\mathrm{CA}^2=\mathrm{CB}^2$$

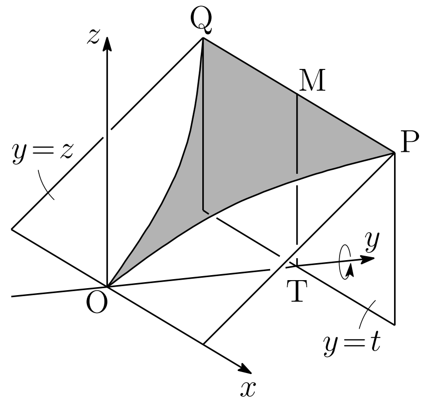
すなわち　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$

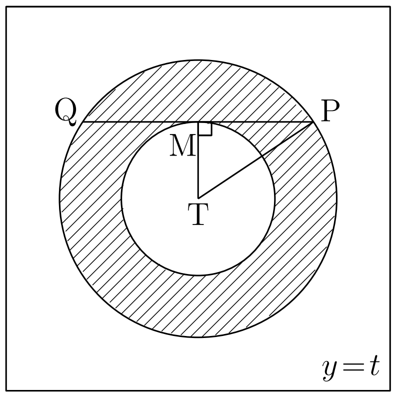
よって，四面体 OABC は正四面体である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 図形 D は

$$y=z,\quad -\frac{e^y+e^{-y}}{2}+1 \leqq x \leqq \frac{e^y+e^{-y}}{2}-1,\quad 0 \leqq y \leqq \log a$$

図形 D と平面 $y=t\ (0 \leqq t \leqq \log a)$ との共有部分は，2点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}-1,\ t,\ t\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}+1,\ t,\ t\right)$ を結ぶ線分 PQ で，線分 PQ の中点を M とする．





PQ を点 T(0, t, 0) を中心に y 軸の周りに回転させた図形の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\pi(\mathrm{TP}^2-\mathrm{TM}^2)=\pi\mathrm{MP}^2=\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2$$

よって，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\log a} S(t)\,dt=\pi\int_0^{\log a}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2 dt\\
&=\pi\int_0^{\log a}\left(\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^t-e^{-t}+\frac{3}{2}\right)dt\\
&=\pi\left[\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{8}e^{-2t}-e^t+e^{-t}+\frac{3}{2}t\right]_0^{\log a}\\
&=\boldsymbol{\pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\right\}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ n 秒後にXの x 座標が0，1，2である確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とすると，
$a_0=1$，$b_0=0$，$c_0=0$

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n & \cdots ② \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n & \cdots ③ \end{cases}$$

①〜③の辺々を加えると　$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n$

ゆえに　$a_n+b_n+c_n=a_0+b_0+c_0=1 \quad \cdots ④$

②，④から c_n を消去すると

$$b_{n+1}=-\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(b_n-\frac{3}{7}\right)$$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{3}{7}\right\}$ は初項が $b_0-\dfrac{3}{7}$，公比が $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{3}{7}=\left(b_0-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad b_n=\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\} \quad \cdots ⑤$$

①−③より　$a_{n+1}-c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-c_n)$

数列 $\{a_n-c_n\}$ は初項が a_0-b_0，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-c_n=(a_0-c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots ⑥$$

④−⑤+⑥より　$2a_n=1-\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

補足　同様の計算により

$$b_n=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad c_n=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 2次方程式 $f(x)=0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$a=-(\alpha+\beta),\quad b=\alpha\beta \quad \cdots(*)$$

したがって　　$f(x)=x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$

$g(x)=f(x^3)$ とおくと　　$g(x)=(x^3-\alpha)(x^3-\beta)$

$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れるとき，$g(x)$ は $x-\alpha$ および $x-\beta$ で割り切れるから，$g(\alpha)=0$，$g(\beta)=0$ より

$$(\alpha^3-\alpha)(\alpha^3-\beta)=0 \quad \text{かつ} \quad (\beta^3-\alpha)(\beta^3-\beta)=0$$

上の2式の α，β の対称性により，次の場合分けを行う．

(i) $\alpha^3-\alpha=0$，$\beta^3-\beta=0$ の場合
α，β は実数であるから，$(*)$ より，a，b はともに実数となり，不適．

(ii) $\alpha^3-\alpha=0$，$\beta^3-\alpha=0$ の場合
$\alpha=\beta=0$ のとき，$(*)$ により，a，b がともに実数となり，不適
$\alpha=\beta^3=\pm1$ のとき，β が実数のとき，$(*)$ により，a，b がともに実数となるから，β は虚数であることに注意して

$$(\alpha,\ \beta)=\left(1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right),\ \left(-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

ゆえに　$$(a,\ b)=\left(\frac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right),\ \left(\frac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

(複号同順)

(iii) $\alpha^3-\beta=0$，$\beta^3-\alpha=0$ の場合
β を消去すると　　$\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha^2+1)(\alpha^4+1)=0$
α が実数とき，β は実数となるから，a，b はともに実数となり，不適．
$\alpha=\pm i$ のとき，$\beta=\alpha^3=\mp i$ より (複号同順)，$a=0,\ b=1$ となり，不適．
$\alpha=\dfrac{\pm1+i}{\sqrt{2}}$ のとき，$\beta=\dfrac{\mp1+i}{\sqrt{2}}$ となり (複号同順)，$a=-\sqrt{2}\,i$，$b=-1$
$\alpha=\dfrac{\mp1-i}{\sqrt{2}}$ のとき，$\beta=\dfrac{\pm1-i}{\sqrt{2}}$ となり (複号同順)，$a=\sqrt{2}\,i$，$b=-1$

(i)〜(iii) より　$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}x+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \\ x^2+\dfrac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2}x+\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2} \\ x^2\pm\sqrt{2}\,ix-1 \end{cases}}$$　**(複号同順)**