平成27年度　京都大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理，医，薬，工，農，総合人間(理系)，経済(理系)

1 2つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．
ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を含む線とは考えない．

2 次の2つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ．

(a) 少なくとも2つの内角は 90° である．

(b) 半径1の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう．

3 (1) a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ1つ存在することを示せ．

(2) $a_1=1$ として，$n=1,2,\cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ．

4 一辺の長さが1の正四面体ABCDにおいて，Pを辺ABの中点とし，点Qが辺AC上を動くとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

5 a，b，c，d，e を正の実数として整式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$g(x)=dx+e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

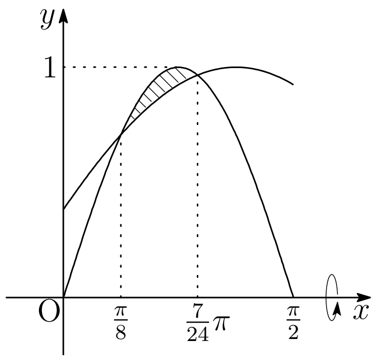
6 2つの関数を

$$f_0(x)=\frac{x}{2},\quad f_1(x)=\frac{x+1}{2}$$

とおく．$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,2,\cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sin 2x - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) = 2\cos\dfrac{24x + \pi}{16}\sin\dfrac{8x - \pi}{16}$



$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\quad \dfrac{\pi}{16} < \dfrac{24x + \pi}{16} < \dfrac{13\pi}{16}$

$$-\frac{\pi}{16} < \frac{8x - \pi}{16} < \frac{3\pi}{16}$$

$y = \sin 2x$ と $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$ の交点の x 座標は

$$\frac{24x + \pi}{16} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{8x - \pi}{16} = 0$$

すなわち $\quad x = \dfrac{7}{24}\pi, \quad \dfrac{\pi}{8}$

$\dfrac{\pi}{8} < x < \dfrac{7}{24}\pi$ において $\quad \cos\dfrac{24x + \pi}{16} > 0$，$\sin\dfrac{8x - \pi}{16} > 0$

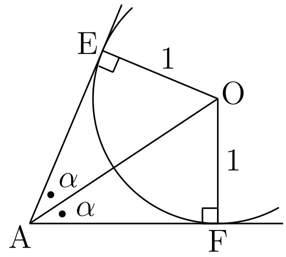
したがって $\quad \sin 2x > \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) > 0$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} \left\{\sin^2 2x - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right\} dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} \left\{-\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right\} dx \\
&= \left[-\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{16}}$

2 右の図の四角形 OEAF について



$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

四角形 OEAF の面積は $\quad \dfrac{1}{\tan\alpha}$

条件 (a)，(b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを 2α，2β，2γ，2δ とし，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\delta} \quad \cdots (*)$$

一般性を失うことなく　$2\gamma = 2\delta = 90^\circ$，$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

上の 2 式から　$\beta = 90^\circ - \alpha$，$\gamma = \delta = 45^\circ$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} + \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{\tan 45^\circ} \\ &= \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} + 2 = \frac{(\tan\alpha - 1)^2}{\tan\alpha} + 4 \geqq 4 \end{aligned}$$

よって，S は $\alpha = 45^\circ$，すなわち，四角形 ABCD が正方形のとき，最小値　**4**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=e^x+1$ を微分すると　$y'=e^x$

曲線 $y=e^x+1$ の上の点 $(t,\ e^t+1)$ における接線の方程式は

$$y-(e^t+1)=e^t(x-t)$$

これが点 $(a,\ 0)$ を通るから

$$-(e^t+1)=e^t(a-t) \quad \text{ゆえに} \quad a=t-e^{-t}-1 \quad \cdots(*)$$

$f(t)=t-e^{-t}-1$ とおくと　$f'(t)=1+e^{-t}>0$

$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty, \quad \lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$$

したがって，$f(t)=a$ を満たす t はただ 1 つ存在する．

よって，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線はただ 1 つ存在する．

(2) $a=a_n$，$t=a_{n+1}$ を $(*)$ に代入すると

$$a_n=a_{n+1}-e^{-a_{n+1}}-1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}-a_n=1+e^{-a_{n+1}} \quad \cdots①$$

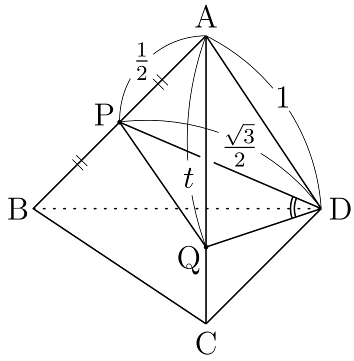
上式より，$a_{n+1}-a_n>1$ であるから

$n>1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)>\sum_{k=1}^{n-1}$

ゆえに　$a_n>n$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

上式に注意すると，① から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\mathbf{1}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\mathrm{AQ}=t$ とおいて，$\triangle\mathrm{APQ}$ および $\triangle\mathrm{AQD}$ に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2+t^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot t\cos 60^\circ\\ &= t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4},\\ \mathrm{QD}^2 &= t^2+1^2-2\cdot t\cdot 1\cos 60^\circ\\ &= t^2-t+1\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{PQD}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{PDQ} &= \frac{\mathrm{PD}^2+\mathrm{QD}^2-\mathrm{PQ}^2}{2\mathrm{PD}\cdot\mathrm{QD}}\\ &= \frac{\frac{3}{4}+(t^2-t+1)-\left(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{t^2-t+1}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3-t}{\sqrt{t^2-t+1}}\end{aligned}$$

ここで，$f(t)=\dfrac{3-t}{\sqrt{t^2-t+1}}\ (0\leqq t\leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{-1\cdot\sqrt{t^2-t+1}-(3-t)\cdot\dfrac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t+1}}}{t^2-t+1}\\ &= \frac{-2(t^2-t+1)+(t-3)(2t-1)}{(t^2-t+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1-5t}{(t^2-t+1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{21}}{3}$	$\searrow$	

よって，求める最大値は　$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2\sqrt{21}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px+q$，余りを $r \neq 0$ とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px + q + \frac{r}{g(x)}, \quad p = \frac{a}{d} > 0$$

2 以上の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}
\frac{f(n-1)}{g(n-1)} &= p(n-1) + q + \frac{r}{g(n)-d} \\
\frac{f(n)}{g(n)} &= pn + q + \frac{r}{g(n)} \\
\frac{f(n+1)}{g(n+1)} &= p(n+1) + q + \frac{r}{g(n)+d}
\end{aligned}$$

上の 3 式から

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(n-1)}{g(n-1)} + \frac{f(n+1)}{g(n+1)} - 2 \cdot \frac{f(n)}{g(n)} \right| &= \left| \frac{r}{g(n)-d} + \frac{r}{g(n)+d} - \frac{2r}{g(n)} \right| \\
&= \left| \frac{2rd^2}{g(n)\{g(n)+d\}\{g(n)-d\}} \right| \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

$d > 0$ より $g(n) = dn + e$ は，いくらでも大きくなるので，このとき

$$0 < \left| \frac{2rd^2}{g(n)\{g(n)+d\}\{g(n)-d\}} \right| < 1$$

となり，$(*)$ の左辺が整数であることに反する．

よって，$r = 0$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 条件により

$$x_0 = \frac{1}{2},$$
$$x_1 = \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},$$
$$x_2 = \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}$$
$$\vdots$$

これから　$x_n = \dfrac{1}{2^{n+1}},\ \dfrac{3}{2^{n+1}}, \cdots,\ \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

と推測し，それぞれの確率は $\dfrac{1}{2^n}$ であることを示す．

実際，$x_n = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ のとき $(k = 1, 2, 3, \cdots 2^n)$，$\dfrac{1}{2^n} \cdot \dfrac{1}{2}$ の確率で

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} = \frac{2k-1}{2^{n+2}} \quad \cdots ①$$

また，$x_n = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ のとき $(k = 1, 2, 3, \cdots 2^n)$，$\dfrac{1}{2^n} \cdot \dfrac{1}{2}$ の確率で

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} + 1\right) = \frac{2^{n+1} + 2k - 1}{2^{n+2}} \quad \cdots ②$$

①，② より　$x_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+2}},\ \dfrac{3}{2^{n+2}}, \cdots,\ \dfrac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}$

であり，それぞれの確率は $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ である．

$n = 0$ のときは，自明であるから，数学的帰納法により示された．

したがって，x_n の要素は 2^n 個あり，$\dfrac{2N-1}{2^{n+1}} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{2N+1}{2^{n+1}}$ とすると

これを満たす自然数 N は　$\dfrac{2^{n+1}}{3} - \dfrac{1}{2} < N < \dfrac{2^{n+1}}{3} + \dfrac{1}{2}$

$[x]$ を x を超えない最大の整数とすると　$N = \left[\dfrac{2^{n+1}}{3} + \dfrac{1}{2}\right]$

ここで，$2 \equiv -1 \pmod 3$ であるから，$2^{n+1} + (-1)^n \equiv 0 \pmod 3$ より

$$N = \left[\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{3}\right] = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

よって　$P_n = \dfrac{N}{2^n} = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3 \cdot 2^n} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}$

別解 $f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{1+x}{2}$ より

$$\begin{aligned}
&0<x<\frac{1}{3}\text{ のとき，}\quad 0<f_0(x)<\frac{1}{6},\quad \frac{1}{2}<f_1(x)<\frac{2}{3}\\
&\frac{1}{3}\leqq x<\frac{2}{3}\text{ のとき，}\quad \frac{1}{6}\leqq f_0(x)<\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3}\leqq f_1(x)<\frac{5}{6}\\
&\frac{2}{3}\leqq x<1\text{ のとき，}\quad \frac{1}{3}\leqq f_0(x)<\frac{1}{2},\quad \frac{5}{6}\leqq f_1(x)<1
\end{aligned}$$

$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ である確率を a_n，$\dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3}$ である確率を b_n，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ である確率を c_n とすると

$$\begin{aligned}
&a_0=0,\quad b_0=1,\quad c_0=0\\
&a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n) \qquad \cdots ①\\
&b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n) \qquad \cdots ②\\
&c_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n) \qquad \cdots ③
\end{aligned}$$

①＋②＋③ より　$a_n+b_n+c_n=1 \quad \cdots ④$

これを ② に代入して

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)\quad \text{ゆえに}\quad b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_0-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\quad \text{ゆえに}\quad b_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots ⑤$$

①－③ より　$a_{n+1}-c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-c_n)=0$　ゆえに　$a_n=c_n \quad \cdots ⑥$

④，⑥ から　$a_n=c_n=\dfrac{1-b_n}{2}$

よって，求める確率 P_n は

$$\begin{aligned}
P_n&=a_n+b_n=\frac{1-b_n}{2}+b_n\\
&=\frac{1+b_n}{2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}
\end{aligned}$$