平成 26 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

$\boxed{1}$ 座標空間における次の 3 つの直線 l，m，n を考える．

l は点 A$(1,\ 0, -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u} = (2,\ 1, -1)$ に平行な直線である．
m は点 B$(1,\ 2, -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v} = (1, -1,\ 1)$ に平行な直線である．
n は点 C$(1, -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w} = (1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m，n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PR}^2$ を求めよ，

$\boxed{2}$ 2 つの粒子が時刻 0 において △ABC の頂点 A に位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ．

$\boxed{3}$ △ABC は条件 $\angle\mathrm{B} = 2\angle\mathrm{A}$，$\mathrm{BC} = 1$ をみたす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{B}$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 実数の定数 a，b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 x で不等式

$$f(x) \leqq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$$

が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

$\boxed{5}$ 自然数 a，b はどちらも 3 で割り切れないが，$a^3 + b^3$ は 81 で割り切れる．このような a，b の組 $(a,\ b)$ のうち，$a^2 + b^2$ の値を最小にするものと，そのときの $a^2 + b^2$ の値を求めよ．

$\boxed{6}$ 双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A，B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，実数 r，s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+r\vec{u},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{b}+s\vec{v},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{c}+t\vec{w}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{b}-\vec{a}+s\vec{v}-r\vec{u}$，　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\vec{c}-\vec{a}+t\vec{w}-r\vec{u}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\perp\vec{w}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\vec{w}=0$ であるから

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{v}+s|\vec{v}|^2-r\vec{u}\cdot\vec{v}=0,\quad (\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{w}+t|\vec{w}|^2-r\vec{u}\cdot\vec{w}=0$$

ここで　$\vec{b}-\vec{a}=(0,\ 2,-1)$，　$\vec{c}-\vec{a}=(0,-1,\ 2)$，

$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{v}=-3$，　$(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{w}=0$，

$|\vec{v}|^2=3$，　$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，　$|\vec{w}|^2=6$，　$\vec{u}\cdot\vec{w}=3$

したがって　$-3+3s=0$，$6t-3r=0$　ゆえに　$s=1$，$r=2t$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(\vec{b}-\vec{a})+\vec{v}-2t\vec{u}\\&=(0,\ 2,-1)+(1,-1,\ 1)-2t(2,\ 1,-1)\\&=(1-4t,\ 1-2t,\ 2t),\\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\vec{c}-\vec{a}+t\vec{w}-2t\vec{u}\\&=(0,-1,\ 2)+t(1,\ 2,\ 1)-2t(2,\ 1,-1)\\&=(-3t,-1,\ 2+3t),\\ \mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\\&=(1-4t)^2+(1-2t)^2+(2t)^2+(-3t)^2+(-1)^2+(2+3t)^2\\&=42t^2+7\end{aligned}$$

$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ は，$t=0$ のとき**最小値 7** をとる．

このとき，$r=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$，すなわち，$\mathbf{P(1,0,-2)}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の確率漸化式が成り立つ．

$$p(n+1)=\frac{1}{2}p(n)+\frac{1}{4}\{1-p(n)\}\quad \text{ゆえに}\quad p(n+1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{p(n)-\frac{1}{3}\right\}$$

したがって　$p(n)-\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\left\{p(0)-\dfrac{1}{3}\right\}$　よって　$\boldsymbol{p(n)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\theta = A$ とおくと，$B = 2\theta$，$C = \pi - 3\theta$ であるから

$$0 < 2\theta < \pi,\quad 0 < \pi - 3\theta < \pi \quad \text{すなわち} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

正弦定理により $\dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{b}{\sin 2\theta} = \dfrac{c}{\sin(\pi - 3\theta)}$

したがって $b = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta,\quad c = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$

$\triangle$ABC の面積を $S(\theta)$ とすると

$$S(\theta) = \frac{1}{2}bc\sin\theta = \cos\theta\sin 3\theta = \frac{1}{2}(\sin 4\theta + \sin 2\theta)$$

$S(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= 2\cos 4\theta + \cos 2\theta = 2(2\cos^2 2\theta - 1) + \cos 2\theta \\ &= 4\cos^2 2\theta + \cos 2\theta - 2 \\ &= 4\left(\cos 2\theta - \frac{-1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(\cos 2\theta - \frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \end{aligned}$$

$0 < 2\theta < \dfrac{2}{3}\pi$ より，$-\dfrac{1}{2} < \cos 2\theta < 1$ であるから，$\cos 2\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ とおくと

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$(\frac{2}{3}\pi)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$S(\theta)$ が最大となるとき $\cos\angle\mathrm{B} = \cos 2\alpha = \boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}}$ ■

4 $f(x) \leqq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$ より

$$(f(x)+1)(f(x)-1)(f(x)-2) \geqq 0$$

これを解いて　$-1 \leqq f(x) \leqq 1,\ 2 \leqq f(x)$

$f(x)$ は連続関数で，$\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ であるから　$-1 \leqq f(x) \leqq 1$

したがって

$$-1 \leqq \frac{ax+b}{x^2+x+1} \leqq 1$$

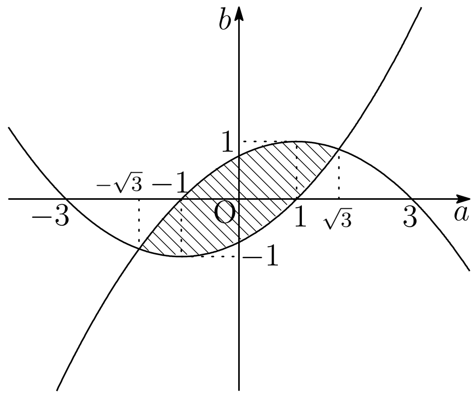
これらを整理すると

$$x^2 + (a+1)x + b + 1 \geqq 0, \quad x^2 - (a-1)x - b + 1 \geqq 0$$

上の不等式がともにすべての実数を解にもつから，係数について

$$\begin{cases} (a+1)^2 - 4\cdot1(b+1) \leqq 0 \\ (a-1)^2 - 4\cdot1(-b+1) \leqq 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} b \geqq \dfrac{1}{4}(a+1)^2 - 1 \\ b \geqq -\dfrac{1}{4}(a-1)^2 + 1 \end{cases}$$

よって，点 $(a,\ b)$ の表す領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



補足 $2 \leqq \dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ のとき

$$2x^2 - (a-2)x + 2 - b \leqq 0$$

これが，すべての実数 x について成立するような a，b は存在しない． ■

5 自然数 n は，法 3 について

$$n \equiv 0 \text{ のとき } n^3 \equiv 0, \quad n \equiv 1 \text{ のとき } n^3 \equiv 1, \quad n \equiv -1 \text{ のとき } n^3 \equiv -1$$

a^3+b^3 が 81 で割り切れる，すなわち，$a^3+b^3 \equiv 0 \pmod 3$ であるから，a，b の一方は法 3 について 1 と合同で，他方は -1 と合同である．したがって

$$a+b \equiv 0, \quad ab \equiv -1 \quad \text{ゆえに} \quad 3\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 - ab \equiv 1 \pmod 3$$

次式より a^2-ab+b^2 は 3 で割り切れるが，9 では割り切れない．

$$a^2-ab+b^2 = (a+b)^2-3ab = 3\left\{3\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 - ab\right\}$$

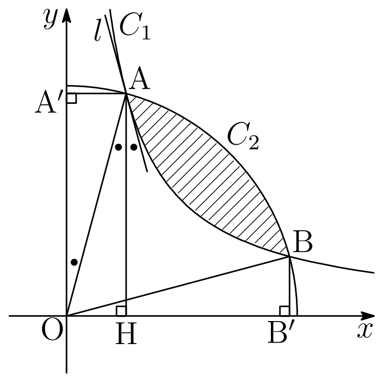
等式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ により，a^3+b^3 が 81 で割り切れるとき，$a+b$ は 27 で割り切れる．

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$$

上式から，a^2+b^2 が最小となるとき　$a+b=27$，$|a-b|=1$

よって，$\boldsymbol{(a,\ b) = (13,\ 14),\ (14,\ 13)}$ のとき，**最小値 365** をとる．■

$\boxed{6}$ 2点A，BはC_1上にあるから，その座標をそれぞれ$\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$とおく$(a<b)$.



直線OAの傾きは　$\dfrac{1}{a^2}$

$y=\dfrac{1}{x}$より　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

C_1上の点Aにおける接線lの傾きは　$-\dfrac{1}{a^2}$

Aからx軸に下ろした垂線AHに関して，直線OAとlは対称であるから

$$\angle\mathrm{OAH}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}\quad ゆえに\quad \angle\mathrm{AOH}=\frac{5}{12}\pi$$

C_1，C_2はともに直線$y=x$に関して対称であるから，A，Bの座標により

$$b=\frac{1}{a}\quad ゆえに\quad ab=1\quad\cdots①$$

図の$\triangle\mathrm{OAA'}$と$\triangle\mathrm{OBB'}$は合同であり，$\triangle\mathrm{OAA'}$，$\triangle\mathrm{OBB'}$，$\triangle\mathrm{OAH}$の面積は等しい．C_1，OA，OBで囲まれた部分の面積をS_1とすると

$$S_1=\triangle\mathrm{OAH}+\int_a^b\frac{dx}{x}-\triangle\mathrm{OBB'}=\int_a^b\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_a^b=\log\frac{b}{a}$$

$r=\mathrm{OA}$とすると　$a=r\cos\dfrac{5}{12}\pi$，$b=r\cos\dfrac{\pi}{12}=r\sin\dfrac{5}{12}\pi\quad\cdots②$

ゆえに　$\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{5}{12}\pi=2+\sqrt{3}$　したがって　$S_1=\log(2+\sqrt{3})$

②の2式を①に代入すると

$$r\cos\frac{5}{12}\pi\cdot r\sin\frac{5}{12}\pi=1\quad ゆえに\quad \frac{1}{2}r^2\sin\frac{5}{6}\pi=1$$

$r=\mathrm{OA}>0$であるから　$r=2$

また　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{AOA'}-\angle\mathrm{BOB'}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}$

C_2，OA，OBで囲まれた部分の面積をS_2とすると

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

よって，求める面積は　$S_2-S_1=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})}$

別解 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて，$C_1 : xy = 1$ に代入すると

$$r\cos\theta \cdot r\sin\theta = 1 \quad ゆえに \quad \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta = 1$$

O を極とすると，OB，OA の偏角はそれぞれ $\frac{\pi}{12}$，$\frac{5}{12}\pi$ であるから

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi} \frac{d\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{d\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\ \log\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} = \log(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

よって，求める面積は $\quad S_2 - S_1 = \frac{2}{3}\pi - \log(2+\sqrt{3})$ ■