平成 25 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

1 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ．

2 N を 2 以上の自然数とし，a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を次の性質 (i)，(ii) をみたす数列とする．

(i) $a_1 = 2^N - 3$,

(ii) $n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$a_n \text{ が偶数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, \quad a_n \text{ が奇数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}.$$

このときどのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$$

が成り立つことを示せ．

3 n を自然数とし，整式 x^n を整式 $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $ax + b$ とする．このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

4 $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

5 xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y = \sqrt{3}\log(1 + x), \quad C_2 : y = \sqrt{3}\log(1 - x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする．さらに △PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである．

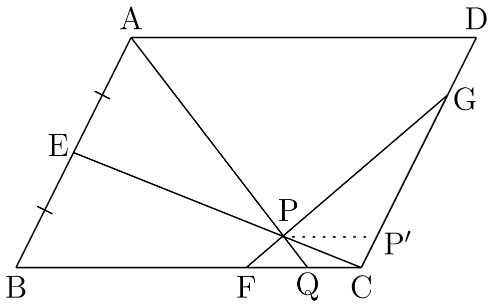
6 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CE}}&=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}\\&=3\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{CG}}\\&=\frac{11}{3}\left(\frac{9}{11}\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\frac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{CG}}\right)\end{aligned}$$

したがって $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}}&=\frac{9}{11}\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\frac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{CG}}\\&=\frac{9}{11}\cdot\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{4}\vec{d}=\frac{3}{11}\vec{b}+\frac{3}{22}\vec{d}\end{aligned}$$

点 P を通り，BC に平行な直線と辺 CD との交点を P′ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP'}}=\frac{3}{22}\vec{d}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{DP'}=\mathrm{P'C}=19:3$$

よって　　$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=\mathrm{DP'}:\mathrm{P'C}=\mathbf{19:3}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{11}{3}\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ であるから，2 直線 AD，CE の交点を A′ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{22}{3}\overrightarrow{\mathrm{CP}}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{A'P}:\mathrm{PC}=19:3$$

よって　　$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=\mathrm{A'P}:\mathrm{PC}=19:3$

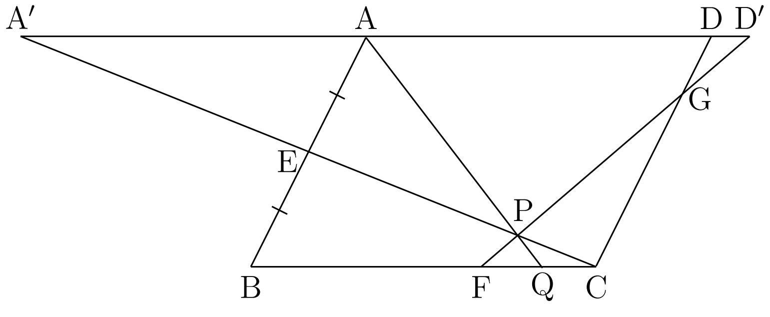
別解 2 直線 AD，CE の交点を A′ とし，2 直線 AD，FG の交点を D′ とする．

$\triangle\mathrm{GDD'}\backsim\triangle\mathrm{GCF}$，$\mathrm{GD}:\mathrm{GC}=1:3$ より　$\mathrm{DD'}:\mathrm{CF}=1:3$

また，$\mathrm{CF}:\mathrm{AD}=1:3$ より　$\mathrm{DD'}:\mathrm{AD}=1:9$

$\mathrm{A'A}=\mathrm{AD}$ であるから　$\mathrm{DD'}:\mathrm{A'D'}=1:19$　ゆえに　$\mathrm{A'D'}:\mathrm{CF}=19:3$

$\triangle\mathrm{PA'D'}\backsim\triangle\mathrm{PCF}$ であるから　$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=19:3$



■

2 性質 (i)，(ii) より ($N \geqq 2$)，a_1 は奇数であるから

$$a_2 = \frac{a_1 - 2}{2} = \frac{(2^N - 3) - 1}{2} = 2^{N-1} - 2 \quad \cdots ①$$

$3 \leqq n \leqq N$ のとき

$$a_n = 2^{N-n+1} - 1 \quad \cdots (*)$$

であることを数学的帰納法により証明する．

［1］ $n = 3$ のとき，① より，a_2 は偶数であるから

$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2^{N-1} - 2}{2} = 2^{N-2} - 1$$

よって，$n = 3$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］ $n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，a_k は奇数であるから

$$a_{k+1} = \frac{a_k - 1}{2} = \frac{(2^{N-k+1} - 1) - 1}{2} = 2^{N-k} - 1$$

よって，$n = k + 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］ より，$3 \leqq n \leqq N$ について，$(*)$ が成り立つ．

ゆえに　$a_N = 1$　したがって　$a_n = 0 \ (n \geqq N + 1)$

以上の結果から

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \sum_{n=3}^{N} a_n& \\
&= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + \sum_{n=3}^{N}(2^{N-n+1} - 1) \\
&= -3 + \sum_{n=1}^{N}(2^{N-n+1} - 1) = -3 + \sum_{n=1}^{N}(2^n - 1) \\
&= -3 + \frac{2(2^N - 1)}{2 - 1} - N \\
&= 2^{N+1} - N - 5
\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ x^n を x^2-2x-1 で割った商を $Q_n(x)$，余りを a_nx+b_n とすると

$$x^n=(x^2-2x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

両辺に x を掛けると

$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x(x^2-2x-1)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx\\&=(x^2-2x-1)\{xQ_n(x)+a_n\}+(2a_n+b_n)x+a_n\end{aligned}$$

したがって　$(*)\left\{\begin{array}{l}a_{n+1}=2a_n+b_n\\b_{n+1}=a_n\end{array}\right.$

また，x を x^2-2x-1 を割った余りは x であるから　$a_1=1,\ b_1=0$

よって，これと $(*)$ により，a_n，b_n は整数．

$a_{n+1}\equiv b_{n+1}\equiv 0 \pmod p$ を満たす素数 p と自然数 n が存在すると仮定すると

$$2a_n+b_n\equiv 0,\quad a_n\equiv 0\quad \text{すなわち}\quad a_n\equiv b_n\equiv 0\pmod p$$

したがって　$a_1\equiv b_1\equiv 0 \pmod p$　これは $a_1=1,\ b_1=0$ に反する．

よって，a_n，b_n をともに割り切る素数 p は存在しない．

補足 $x^2-2x-1=0$ の 2 解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-1$$

$x^n=(x^2-2x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n$ より

$$\alpha^n=a_n\alpha+b_n,\quad \beta^n=a_n\beta+b_n$$

したがって　$a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},\quad b_n=\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$　ゆえに　$b_{n+1}=a_n$

また，$\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)$ より

$$\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\frac{2(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\quad \text{ゆえに}\quad a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$

これからも $(*)$ が成立していることが分かる．■

$\boxed{4}$ $f(x)=\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ とおくと，$f(-x)=f(x)$ であるから，

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の最大値は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で調べればよい．

$$f'(x)=-\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$f''(x)=-\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

このとき　$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<f'(0)=0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\pi-4}{4}>\dfrac{1.7\times3.1-4}{4}>0$

ゆえに，次式を満たす α が唯一存在する．

$$f'(\alpha)=0,\quad \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

このとき　$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2>\dfrac{1.69}{16}\pi^2=\left(\dfrac{1.3}{4}\pi\right)^2$

$$>\left(\frac{1.3\times3.1}{4}\right)^2=\left(\frac{4.03}{4}\right)^2>1$$

よって，$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2}$ をとる．

補足 $f'(x)=x\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sin x}{x}\right)$ より，$g(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sin x}{x}$ $\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$g'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}=\frac{\cos x(\tan x-x)}{x^2}>0$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-1<0$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{\sqrt{3}\pi-4}{2\pi}>0$

$g(x)$ は単調増加であるから，$g(\alpha)=0$ を満たす α が唯一存在する．

したがって　$0<x<\alpha$ で $g(x)<0$，$\alpha<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $g(x)>0$

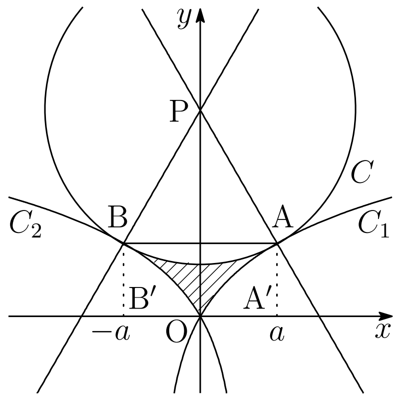
$f'(x)$ の符号と $g(x)$ の符号は一致するから，上の $f(x)$ の増減表を得る．■

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x) = \sqrt{3}\log(1+x)$ とすると

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{1+x}$$

接点Aの x 座標を a とすると，$f'(a) = \tan 30^\circ$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{1+a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$



$\mathrm{PA} = \mathrm{AB} = 2a = 4$，$\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{3}$ より，C と線分 AB で囲まれた部分の面積を S_0 とすると

$$S_0 = \frac{1}{2}\cdot 4^2\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$

$0 \leqq x \leqq 2$ において，C_1 と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{3}\int_0^2 \log(1+x)\,dx \\ &= \sqrt{3}\Big[\,(1+x)\log(1+x) - x\,\Big]_0^2 \\ &= 3\sqrt{3}\log 3 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

2点A，Bから x 軸にそれぞれ AA′，BB′ を下ろすと，四角形 ABB′A′ の面積は

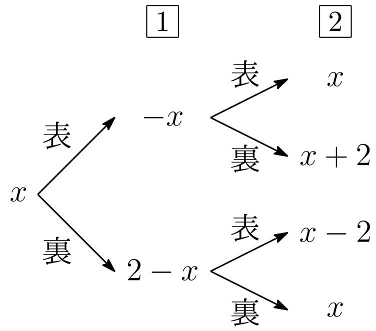
$$4 \times \sqrt{3}\log 3 = 4\sqrt{3}\log 3$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 4\sqrt{3}\log 3 - S_0 - 2S_1 \\ &= 4\sqrt{3}\log 3 - \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) - 2(3\sqrt{3}\log 3 - 2\sqrt{3}) \\ &= \boldsymbol{8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\log 3 - \frac{8}{3}\pi} \end{aligned}$$

■

$\boxed{6}$ (1) 座標 x にあるとき，硬貨の表と裏により，それぞれ $-x$ と $2-x$ に移動するので



$$f(x)=-x,\quad g(x)=2-x$$

とおくと，2 回の試行による石の座標は次のようになる．

表表のとき　$f(f(x))=x$
表裏のとき　$g(f(x))=x+2$
裏表のとき　$f(g(x))=x-2$
裏裏のとき　$g(g(x))=x$

よって，求める確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から，2 回硬貨を投げる試行を T とすると，この試行により，石の座標の増減が $+2$，0，-2 となる 3 つの事象があり，それぞれの確率は $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$ である．硬貨を $2n$ 回投げる，すなわち，試行 T を n 回行ったとき，石の座標が $2n-2$ だけ増加するのは，

$$+2(n-1)+0\cdot1=2n-2$$

これにより，増減が $+2$ である事象が $n-1$ 回，増減が 0 である事象が 1 回である．よって，求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{n}{2^{2n-1}}}$$

補足 増減が $+2$，0，-2 である事象がそれぞれ $n-1$ 回，1 回，0 回であるから

$$\frac{n!}{(n-1)!1!0!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=\frac{n}{2^{2n-1}}$$

■