平成 24 年度　京都大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 次の各問に答えよ．

(1) a が正の実数のとき $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

2 正四面体 OABC において，点 P，Q，R をそれぞれ辺 OA，OB，OC 上にとる．ただし P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする．△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行であることを証明せよ．

3 実数 x，y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ．

4 (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ．

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ．

5 次の命題 (p)，(q) のそれぞれについて，正しいかどうかを答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ．

(p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である．

(q) △ABC と △ABD において，AC < AD かつ BC < BD ならば，∠C > ∠D である．

6 さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ とする．さらに

$$Y_1=X_1,\quad Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\cdots,n)$$

によって $Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n$ を定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ．

解答例

1 (1) $0<a<1$ のとき　$1<1+a^n<2$ より　$1<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}$

$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$

$a\geqq 1$ のとき　$a^n<1+a^n<2a^n$ より　$a<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$

$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}a=a$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a$

よって　　$\boldsymbol{0<a<1}$ **のとき**　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1}$,

$\boldsymbol{a\geqq 1}$ **のとき**　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a}$

別解 $0<a<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)=1$　ゆえに　$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$

$a=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)=2$　ゆえに　$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$

$1<a$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}a\left(\frac{1}{a^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}=a$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=-\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}\right)'\log\sqrt{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle=-\left[\ \frac{1}{x}\log\sqrt{1+x^2}\ \right]_1^{\sqrt{3}}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

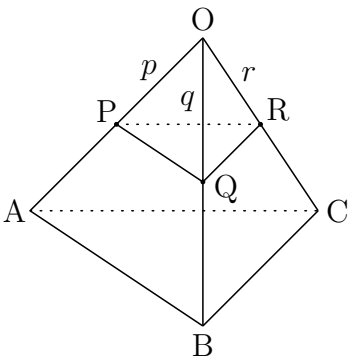
$x=\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{1}{1+x^2}=\cos^2\theta$,　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$1\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\left[\ \theta\ \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$$

よって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}\right)\boldsymbol{\log 2}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{12}}$　■

2 $p=\mathrm{OP}$，$q=\mathrm{OQ}$，$r=\mathrm{OR}$ とおき，△OPQ に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= p^2+q^2-2pq\cos 60^\circ \\ &= p^2+q^2-pq\end{aligned}$$

同様に，△OQR，△ORP に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2 &= q^2+r^2-qr, \\ \mathrm{RP}^2 &= r^2+p^2-rp\end{aligned}$$

$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$ であるから

$$p^2+q^2-pq=q^2+r^2-qr \quad \text{ゆえに} \quad (p-r)(p-q+r)=0 \quad \cdots ①$$

また，$\mathrm{QR}=\mathrm{RP}$ であるから $\quad (q-p)(q-r+p)=0 \quad \cdots ②$

① において，$r\neq p$ とすると，$q=p+r$ となり，これを ② に代入すると

$$(p+r-p)(p+r-r+p)=0 \quad \text{ゆえに} \quad pr=0$$

このとき，$p=0$ または $r=0$ となり，不適．したがって $\quad r=p$

$r=p$ を ② に代入すると $\quad q(q-p)=0 \quad$ すなわち $\quad p=q$

$p=q=r$ であるから $\quad \mathrm{OA}:\mathrm{OP}=\mathrm{OB}:\mathrm{OQ}=\mathrm{OC}:\mathrm{OR}$

よって，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行である． ■

3 $x+y=t$ とおくと，条件 $x^2+xy+y^2=6$ より

$$xy=(x+y)^2-(x^2+xy+y^2)=t^2-6$$

x，y を解とする λ に関する 2 次方程式は

$$\lambda^2-t\lambda+t^2-6=0$$

この方程式は，実数解をもつから，係数について

$$(-t)^2-4\cdot1\cdot(t^2-6)\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2-8\leqq 0$$

これを解いて　　$-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2\sqrt{2}$

したがって

$$\begin{aligned} x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y &= xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)\\ &=(t^2-6)t-t^2+t\\ &=t^3-t^2-5t \end{aligned}$$

$f(t)=t^3-t^2-5t$ $(-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2\sqrt{2})$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-2t-5=(t+1)(3t-5)$$

t	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↗	極大	↘	極小	↗	

$$f(-2\sqrt{2})=-8-6\sqrt{2}=-8-\sqrt{72}<-16$$

$$f(-1)=3$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{175}{27}>-7$$

$$f(2\sqrt{2})=-8+6\sqrt{2}=-8+\sqrt{72}<1$$

よって，求める値 $f(t)$ のとりうる値は　$\boldsymbol{-8-6\sqrt{2}\leqq f(t)\leqq 3}$ ■

4 (1) $\sqrt[3]{2}$ を有理数と仮定し

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素である整数})$$

とする．この両辺を 3 乗し整理すると　$p^3 = 2q^3$

整数 p は 2 を因数にもつから，$p = 2r$ とおくと (r は整数)

$$(2r)^3 = 2q^3 \quad \text{ゆえに} \quad q^3 = 4r^3$$

したがって，q も 2 を因数にもち，$p,\ q$ が互いに素であることに反し，矛盾を生じる．よって，$\sqrt[3]{2}$ は無理数である．

別解 $\sqrt[3]{2}$ を有理数と仮定し

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素である整数})$$

とする．この両辺を 3 乗すると　$2 = \dfrac{p^3}{q^3}$

上式の左辺は整数で，$p,\ q$ は互いに素であるから

$$q^3 = 1 \quad \text{すなわち} \quad q = 1,\ p^3 = 2$$

$1^3 = 1$，$2^3 = 8$ であるから，これを満たす整数 p は存在しない．

よって，$\sqrt[3]{2}$ は無理数である．

(2) $P(x)$ を $x^3 - 2$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax^2 + bx + c$ とおくと

$$P(x) = (x^3 - 2)Q(x) + ax^2 + bx + c \qquad (a,\ b,\ c \text{ は有理数})$$

$\alpha = \sqrt[3]{2}$ とおくと，条件から $P(\alpha) = 0$ であるから

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots ① \quad \text{これに}\alpha\text{を掛けると} \quad b\alpha^2 + c\alpha + 2a = 0$$

上の 2 式から $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c \\ 2a \end{pmatrix} \cdots (*)$ であるから

$$(ac - b^2) \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 2a \end{pmatrix}$$

$ac - b^2 \neq 0$ とすると，$\alpha^2,\ \alpha$ は有理数となるから，$ac - b^2 = 0$

これと $(*)$ から c を消去すると

$$\begin{pmatrix} a^2b & ab^2 \\ a^2b & ab^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b^3 \\ 2a^3 \end{pmatrix}$$

$b^3 = 2a^3$ を満たす有理数 $a,\ b$ は $a = b = 0$ であり，① により　$c = 0$

よって，題意は成立する．　■

5 (p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る最小の内角は $\dfrac{180^\circ}{n}$

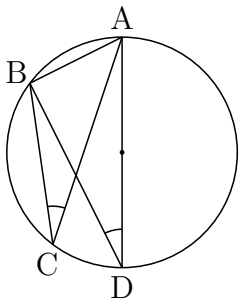
したがって，正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る内角は

$$\frac{180^\circ}{n} \times k \qquad (k \text{ は自然数})$$

条件を満たすとき $\dfrac{180^\circ}{n} \times k = 60^\circ$ ゆえに $n = 3k$

上式から，n は 3 の倍数である．よって，本命題は**真**である．

(q) 右の図のように，AD を直径とする円周上に，A，B，C，D をこの順に並んだ位置にとると



$$\mathrm{AC} < \mathrm{AD} \text{ かつ } \mathrm{BC} < \mathrm{BD}$$

一方，$\angle\mathrm{C}$，$\angle\mathrm{D}$ は，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の円周角であるから

$$\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{D}$$

よって，本命題は**偽**である．

■

6 $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$b=\sqrt{3}+1$ とおくと

$$\frac{1}{a}=b-2,\quad \frac{1}{b}=a-1,\quad a-1<b-2 \quad \cdots(*)$$

n を自然数として

$$q_n=P\left(Y_n<a\right),\quad p_n=P\left(a\leqq Y_n\leqq b\right),\quad r_n=P\left(b<Y_n\right)$$

とおくと $$q_n+p_n+r_n=1 \quad \cdots(**)$$

$Y_1=X_1$ より，$1<a<2<b<3$ であるから

$$q_1=\frac{1}{6},\quad p_1=\frac{1}{6},\quad r_1=\frac{4}{6}$$

(i) $Y_n<a$ のとき，$b-2=\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{Y_n}\leqq 1$ であるから，$(*)$ に注意して

$$X_{n+1}-1+a<X_{n+1}-2+b<X_{n+1}+\frac{1}{Y_n}\leqq X_{n+1}+1$$

$a\leqq Y_{n+1}\leqq b$ を満たすのは $\quad X_{n+1}=1$

(ii) $a\leqq Y_n\leqq b$ のとき，$a-1=\dfrac{1}{b}\leqq\dfrac{1}{Y_n}\leqq\dfrac{1}{a}=b-2$ であるから

$$X_{n+1}-1+a\leqq X_{n+1}+\frac{1}{Y_n}\leqq X_{n+1}-2+b$$

$a\leqq Y_{n+1}\leqq b$ を満たすのは $\quad X_{n+1}=1,\ 2$

(iii) $b<Y_n$ のとき，$0<\dfrac{1}{Y_n}<\dfrac{1}{b}=a-1$ であるから，$(*)$ に注意して

$$X_{n+1}<X_{n+1}+\frac{1}{Y_n}<X_{n+1}+a-1<X_{n+1}+b-2$$

$a\leqq Y_{n+1}\leqq b$ を満たすのは $\quad X_{n+1}=2$

(i)〜(iii) より $\quad p_{n+1}=\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{2}{6}p_n+\dfrac{1}{6}r_n$ $\quad (**)$ より $\quad p_{n+1}=\dfrac{1}{6}p_n+\dfrac{1}{6}$

したがって $\quad p_{n+1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}\left(p_n-\dfrac{1}{5}\right)$ $\quad$ ゆえに $\quad p_n-\dfrac{1}{5}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{1}{5}\right)$

$p_1=\dfrac{1}{6}$ であるから $\quad \boldsymbol{p_n=\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{6^n}\right)}$ ■