平成 24 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

1 次の各問に答えよ．

(1) a が正の実数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

2 正四面体 OABC において，点 P，Q，R をそれぞれ辺 OA，OB，OC 上にとる．ただし P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする．△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行であることを証明せよ．

3 実数 x，y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ．

4 (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ．

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ．

5 次の命題 (p)，(q) のそれぞれについて，正しいかどうかを答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ．

(p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である．

(q) △ABC と △ABD において，AC $<$ AD かつ BC $<$ BD ならば，$\angle$C $>$ $\angle$D である．

6 さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．さらに

$$Y_1=X_1,\quad Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\cdots,n)$$

によって Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_n を定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $0<a<1$ のとき　$1<1+a^n<2$ より　$1<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$

$a\geqq 1$ のとき　$a^n<1+a^n<2a^n$ より　$a<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}a=a$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)=a$

よって　$\boldsymbol{0<a<1}$ **のとき**　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1}$,

$\boldsymbol{a\geqq 1}$ **のとき**　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a}$

別解 $0<a<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)=1$　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$

$a=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)=2$　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$

$0<a<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)=\lim_{n\to\infty}a\left(\frac{1}{a^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}=a$

(2) $$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx&=-\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}\right)'\log\sqrt{1+x^2}\,dx\\&=-\left[\frac{1}{x}\log\sqrt{1+x^2}\,\right]_1^{\sqrt{3}}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1+x^2}\,dx\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\end{aligned}$$

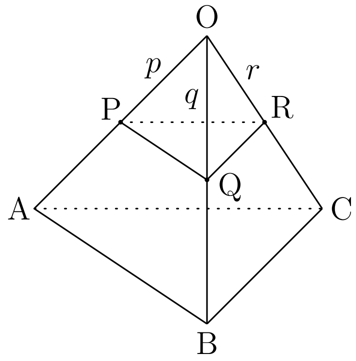
$x=\tan\theta$ とおくと　$\displaystyle\frac{1}{1+x^2}=\cos^2\theta$，$\displaystyle\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

x	$1\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$$

よって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}}$ ■

2 $p = \mathrm{OP}$，$q = \mathrm{OQ}$，$r = \mathrm{OR}$ とおき，△OPQ に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= p^2 + q^2 - 2pq\cos 60^\circ \\ &= p^2 + q^2 - pq\end{aligned}$$

同様に，△OQR，△ORP に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2 &= q^2 + r^2 - qr, \\ \mathrm{RP}^2 &= r^2 + p^2 - rp\end{aligned}$$

$\mathrm{PQ} = \mathrm{QR}$ であるから

$$p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr \quad \text{ゆえに} \quad (p-r)(p-q+r) = 0 \quad \cdots①$$

また，$\mathrm{QR} = \mathrm{RP}$ であるから　$(q-p)(q-r+p) = 0 \quad \cdots②$

① において，$r \neq p$ とすると，$q = p + r$ となり，これを ② に代入すると

$$(p + r - p)(p + r - r + p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad pr = 0$$

このとき，$p = 0$ または $r = 0$ となり，不適．したがって　$r = p$

$r = p$ を ② に代入すると　$q(q-p) = 0$　すなわち　$p = q$

$p = q = r$ であるから　$\mathrm{OA} : \mathrm{OP} = \mathrm{OB} : \mathrm{OQ} = \mathrm{OC} : \mathrm{OR}$

よって，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行である．■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x+y=t$ とおくと，条件 $x^2+xy+y^2=6$ より

$$xy=(x+y)^2-(x^2+xy+y^2)=t^2-6$$

x，y を解とする λ に関する 2 次方程式は

$$\lambda^2-t\lambda+t^2-6=0$$

この方程式は，実数解をもつから，係数について

$$(-t)^2-4\cdot1\cdot(t^2-6)\geqq0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2-8\leqq0$$

これを解いて　　$-2\sqrt{2}\leqq t\leqq2\sqrt{2}$

したがって

$$\begin{aligned} x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y &= xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y) \\ &= (t^2-6)t-t^2+t \\ &= t^3-t^2-5t \end{aligned}$$

$f(t)=t^3-t^2-5t$ $(-2\sqrt{2}\leqq t\leqq2\sqrt{2})$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-2t-5=(t+1)(3t-5)$$

t	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$\begin{aligned} f(-2\sqrt{2}) &= -8-6\sqrt{2}=-8-\sqrt{72}<-16 \\ f(-1) &= 3 \\ f\left(\frac{5}{3}\right) &= -\frac{175}{27}>-7 \\ f(2\sqrt{2}) &= -8+6\sqrt{2}=-8+\sqrt{72}<1 \end{aligned}$$

よって，求める値 $f(t)$ のとりうる値は　$\boldsymbol{-8-6\sqrt{2}\leqq f(t)\leqq3}$　■

4 (1) $\sqrt[3]{2}$ を有理数と仮定し

$$\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q \text{ は互いに素である整数})$$

とする．この両辺を 3 乗し整理すると　$p^3=2q^3$

整数 p は 2 を因数にもつから，$p=2r$ とおくと (r は整数)

$$(2r)^3=2q^3\quad \text{ゆえに}\quad q^3=4r^3$$

したがって，q も 2 を因数もち，$p,\ q$ が互いに素であることに反し，矛盾を生じる．よって，$\sqrt[3]{2}$ は無理数である．

別解 $\sqrt[3]{2}$ を有理数と仮定し

$$\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q \text{ は互いに素である整数})$$

とする．この両辺を 3 乗すると　$2=\dfrac{p^3}{q^3}$

上式の左辺は整数で，$p,\ q$ は互いに素であるから

$$q^3=1\quad \text{すなわち}\quad q=1,\ p^3=2$$

$1^3=1$，$2^3=8$ であるから，これを満たす整数 p は存在しない．

よって，$\sqrt[3]{2}$ は無理数である．

(2) $P(x)$ を x^3-2 で割った商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とおくと

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c\qquad (a,\ b,\ c \text{ は有理数})$$

$\alpha=\sqrt[3]{2}$ とおくと，条件から $P(\alpha)=0$ であるから

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0\cdots①\quad \text{これに}\alpha\text{を掛けると}\quad b\alpha^2+c\alpha+2a=0$$

上の 2 式から $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} c \\ 2a \end{pmatrix}\cdots(*)$ であるから

$$(ac-b^2)\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 2a \end{pmatrix}$$

$ac-b^2\neq 0$ とすると，$\alpha^2,\ \alpha$ は有理数となるから，$ac-b^2=0$

これと $(*)$ から c を消去すると

$$\begin{pmatrix} a^2b & ab^2 \\ a^2b & ab^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} b^3 \\ 2a^3 \end{pmatrix}$$

$b^3=2a^3$ を満たす有理数 $a,\ b$ は $a=b=0$ であり，① により　$c=0$

よって，題意は成立する．■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る最小の内角は $\dfrac{180^\circ}{n}$

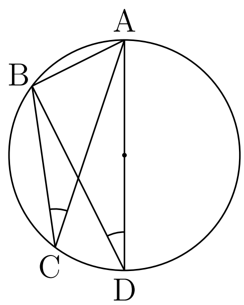
したがって，正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る内角は

$$\frac{180^\circ}{n}\times k \qquad (k \text{ は自然数})$$

条件を満たすとき $\dfrac{180^\circ}{n}\times k = 60^\circ$ ゆえに $n = 3k$

上式から，n は 3 の倍数である．よって，本命題は**真**である．

(q) 右の図のように，AD を直径とする円周上に，A，B，C，D をこの順に並んだ位置にとると



$$\mathrm{AC} < \mathrm{AD} \text{ かつ } \mathrm{BC} < \mathrm{BD}$$

一方，$\angle\mathrm{C}$，$\angle\mathrm{D}$ は，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の円周角であるから

$$\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{D}$$

よって，本命題は**偽**である．

■

$\boxed{6}$ $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$b=\sqrt{3}+1$ とおくと

$$\frac{1}{a}=b-2,\quad \frac{1}{b}=a-1,\quad a-1<b-2 \quad \cdots(*)$$

n を自然数として

$$q_n=P\left(Y_n<a\right),\quad p_n=P\left(a \leqq Y_n \leqq b\right),\quad r_n=P\left(b<Y_n\right)$$

とおくと $$q_n+p_n+r_n=1 \quad \cdots(**)$$

$Y_1=X_1$ より，$1<a<2<b<3$ であるから

$$q_1=\frac{1}{6},\quad p_1=\frac{1}{6},\quad r_1=\frac{4}{6}$$

(i) $Y_n<a$ のとき，$b-2=\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{Y_n} \leqq \dfrac{1}{X_n} \leqq 1$ であるから，$(*)$ に注意して

$$X_{n+1}-1+a<X_{n+1}-2+b<X_{n+1}+\frac{1}{Y_n} \leqq X_{n+1}+1$$

$a \leqq Y_{n+1} \leqq b$ を満たすのは $\quad X_{n+1}=1$

(ii) $a \leqq Y_n \leqq b$ のとき，$a-1=\dfrac{1}{b} \leqq \dfrac{1}{Y_n} \leqq \dfrac{1}{a}=b-2$ であるから

$$X_{n+1}-1+a \leqq X_{n+1}+\frac{1}{Y_n} \leqq X_{n+1}-2+b$$

$a \leqq Y_{n+1} \leqq b$ を満たすのは $\quad X_{n+1}=1,\ 2$

(iii) $b<Y_n$ のとき，$0<\dfrac{1}{Y_n}<\dfrac{1}{b}=a-1$ であるから，$(*)$ に注意して

$$X_{n+1}<X_{n+1}+\frac{1}{Y_n}<X_{n+1}+a-1<X_{n+1}+b-2$$

$a \leqq Y_{n+1} \leqq b$ を満たすのは $\quad X_{n+1}=2$

(i)～(iii) より $\quad p_{n+1}=\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{2}{6}p_n+\dfrac{1}{6}r_n \quad (**)$ より $\quad p_{n+1}=\dfrac{1}{6}p_n+\dfrac{1}{6}$

したがって $\quad p_{n+1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}\left(p_n-\dfrac{1}{5}\right) \quad$ ゆえに $\quad p_n-\dfrac{1}{5}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{1}{5}\right)$

$p_1=\dfrac{1}{6}$ であるから $\quad \boldsymbol{p_n=\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{6^n}\right)}$ ■