平成 23 年度　京都大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

1 次の各問に答えよ．

(1) 箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている．ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする．この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さいほうの数を X とする．これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さいほうの数を Y とする．$X = Y$ である確率を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx$ を求めよ．

2 a，b，c を実数とし，O を原点とする座標平面上において，行列 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を T とする．この 1 次変換 T が 2 つの条件

(i) 点 $(1,\ 2)$ を点 $(1,\ 2)$ に移す

(ii) 点 $(1,\ 0)$ と点 $(0,\ 1)$ が T によって点 A，B にそれぞれ移るとき，△OAB の面積が $\dfrac{1}{2}$ である

を満たすとき，a，b，c を求めよ．

3 xy 平面上で，$y = x$ のグラフと $y = \left|\dfrac{3}{4}x^2 - 3\right| - 2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

4 n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2} < a_j < 1\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ．

5 xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ．

6 空間内に四面体 ABCD を考える．このとき，4 つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $1 \leqq k \leqq 8$ とすると　$P(X \geqq k) = \dfrac{{}_{9-k+1}\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \dfrac{{}_{10-k}\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \dfrac{(10-k)(9-k)}{72}$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \geqq k) - P(X \geqq k+1) \\ &= \frac{(10-k)(9-k)}{72} - \frac{(9-k)(8-k)}{72} = \frac{9-k}{36} \end{aligned}$$

したがって，$X = Y$ である確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{8} \left(\frac{9-k}{36}\right)^2 &= \frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2 = \frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}k^2 \\ &= \frac{1}{36^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17 = \boldsymbol{\frac{17}{108}} \end{aligned}$$

別解 9 枚のカードから 2 枚を同時に選ぶ総数は　${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ (通り)

小さいほうの数を k とすると $(1 \leqq k \leqq 8)$，大きいほうの数は $k+1$ から 9 までの $9-k$ 通りあるから

$$P(X = k) = \frac{9-k}{36}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x^2}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x^2}\,dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{1}{6}\Big[\,(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{24},$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x^2}\,dx &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}\,dx \\ &= \sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

よって　$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx &= \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}\pi}{16}} \end{aligned}$$

注意 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}\,dx$ は，$x^2 + y^2 \leqq \dfrac{1}{2}$，$y \geqq 0$，$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の表す領域の面積で，扇形と直角二等辺三角の面積の和である． ■

$\boxed{2}$ 条件 (i) より

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad (*)\begin{cases} a = -1 \\ b + 2c = 2 \end{cases}$$

条件 (ii) より

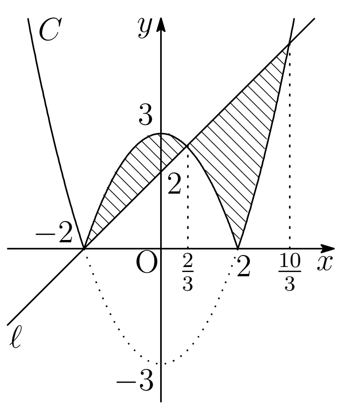
$$\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad ac - b = \pm 1$$

$a = -1$ を代入して　$-b - c = \pm 1$

これと $(*)$ の第 2 式を連立すると　$(b,\ c) = (-4,\ 3),\ (0,\ 1)$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (-1, -4,\ 3),\ (-1,\ 0,\ 1)}$

$\boxed{3}$ $\ell : y = x + 2$ のグラフと $C : y = \left|\dfrac{3}{4}x^2 - 3\right|$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めればよい．
ℓ と C の方程式から y を消去すると



$$\begin{aligned} \left|\frac{3}{4}x^2 - 3\right| &= x + 2 \\ |(x+2)(x-2)| &= \frac{4}{3}(x+2) \\ x + 2 = 0, \quad x - 2 &= \pm\frac{4}{3} \end{aligned}$$

ℓ と C の交点の x 座標は　$x = -2,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{10}{3}$

$-2 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}$ で ℓ と C で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} + 2\right)^3 = \frac{64}{27}$$

C と x 軸で囲まれる図形の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}(2+2)^3 = 8$$

求める面積は図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{10}{3} + 2\right)^3 + S_1 - (S_2 - S_1) - S_2 \\ &= \frac{512}{27} + 2S_1 - 2S_2 = \frac{512}{27} + 2\cdot\frac{64}{27} - 2\cdot 8 = \boldsymbol{\frac{208}{27}} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ n は 2 以上の整数で，$\frac{1}{2} < a_j < 1$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ であるとき

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - a_k) > 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}} \quad \cdots (*)$$

とおく．

［1］$n = 2$ のとき

$$(1 - a_1)(1 - a_2) - \left\{1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right)\right\} = a_2\left(a_1 - \frac{1}{2}\right) > 0$$

よって，$n = 2$ のとき，$(*)$ が成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1 - a_k) &> (1 - a_{n+1})\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}}\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}} - \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}}\right) a_{n+1}\end{aligned}$$

ここで，$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ であるから

$$-\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}}\right) > -\frac{1}{2^n}$$

したがって $\prod_{k=1}^{n+1}(1 - a_k) > 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}} - \frac{a_{n+1}}{2^n} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{2^{k-1}}$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，2 以上の自然数 n について，$(*)$ が成立する．■

5 原点Oを中心とする半径$\sqrt{6}$の球面Sの方程式は

$$x^2+y^2+z^2=6$$

3点$(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$を通る平面αの方程式は

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1 \quad \text{すなわち} \quad x+y+z=4$$

原点Oから平面αまでの距離dは

$$d=\frac{4}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Sの半径rは　$r=\sqrt{6}$

$$r-d=\sqrt{6}-\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{18}-4}{\sqrt{3}}>0 \quad \text{ゆえに} \quad d<r$$

よって，Sとαは共有点をもつ．

Sとαの方程式から

$$\begin{aligned} x+y&=4-z, \\ 2xy&=(x+y)^2-(x^2+y^2) \\ &=(4-z)^2-(6-z^2)=2z^2-8z+10 \end{aligned}$$

$x+y=4-z$，$xy=z^2-4z+5$より，x，yを解とするtに関する2次方程式は

$$t^2-(4-z)t+z^2-4z+5=0$$

この方程式は実数解をもつから，係数について

$$(4-z)^2-4\cdot1(z^2-4z+5)\geqq0 \quad \text{ゆえに} \quad (3z-2)(z-2)\leqq0$$

zの取り得る値の範囲は，これを解いて　$\dfrac{2}{3}\leqq z\leqq 2$

$f(z)=xyz=(z^2-4z+5)z \ \left(\dfrac{2}{3}\leqq z\leqq 2\right)$とおくと

$f(z)=z^3-4z^2+5z$より　$f'(z)=3z^2-8z+5=(z-1)(3z-5)$

z	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2
$f'(z)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(z)$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$	2

よって　$\dfrac{50}{27}\leqq f(z)\leqq 2$　すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2}$　■

6 △ABC の外心を O とし，O を通り平面 ABC に垂直な直線を ℓ とし，ℓ の方向ベクトルを $\vec{n}$ とする．また，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とし，線分 AD の垂直二等分面を α とすると，D は平面 ABC 上の点ではないから

$$\vec{d}\cdot\vec{n}\neq 0$$

したがって，ℓ と α の交点が唯一存在し，これを P とする．

P は ℓ 上の点であるから　　$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$

P は α 上の点であるから　　$\mathrm{AP}=\mathrm{DP}$

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}=\mathrm{DP}$ となるから，4 つの頂点 A，B，C，D を同時に通る P を中心とする球面が存在する．　■