

平成22年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系)

- 理・医 [医学科]・薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系) 1 2 3 4 5 6
数 I・II・III・A・B・C (150分)
- 医 [人間健康科学科]・教育 (理系) 1 2 3 7 8 9
数 I・II・III・A・B・C (150分)

- 1 四面体 ABCD において $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする. このとき, 頂点 A, 頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ.
- 2 x を正の実数とする. 座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $P(x, x)$ をとり, $\triangle APB$ を考える. x の値が変化するとき, $\angle APB$ の最大値を求めよ.
- 3 a を正の実数とする. 座標平面において曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし, 曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), 曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする. このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ.
- 4 $1 < a < 2$ とする. 3 辺の長さ $\sqrt{3}$, a , b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする. このとき a を用いて b を表せ.
- 5 次の問いに答えよ.
- (1) n を正の整数, $a = 2^n$ とする. $3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ.
- (2) m を正の偶数とする. $3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ.
- 6 n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる. 各ボールはいずれかの箱に入るものとし, どの箱に入る確率も等しいとする. どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする. このとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n}$ を求めよ.

- 7 1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる．どの並べかたも同様の確からしさに起こるものとする．このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ．ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく 1 度ずつ用いるものとする．
- 8 数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して $0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^n a_k$ を満たしているとする．このとき，すべての n に対して $a_n = 0$ であることを示せ．
- 9 座標空間内で， $O(0, 0, 0)$ ， $A(1, 0, 0)$ ， $B(1, 1, 0)$ ， $C(0, 1, 0)$ ， $D(0, 0, 1)$ ， $E(1, 0, 1)$ ， $F(1, 1, 1)$ ， $G(0, 1, 1)$ を頂点にもつ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

解答例

1 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CD}$ とすると

$$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \text{ より } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB} \text{ より}$$

$$(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{d} - \vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{d} = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入すると } (\vec{d} - \vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{d} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

線分 AB の中点を N とすると

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{a} - \vec{b}) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } \overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{CD}$$

また, $AB \perp CD$ であるから, 平面 ABM は辺 CD と直交する.

別解 $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$ とおく.
 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0, \end{aligned}$$

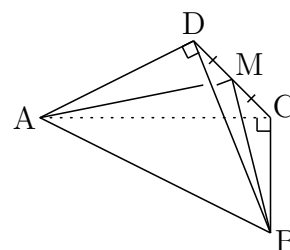
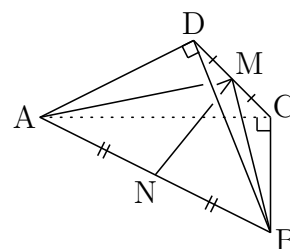
$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{上の 2 式から} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \quad \dots (*)$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{c} \text{ であるから} \quad (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0 \quad \dots (**)$$

$$(*), (**) \text{ より} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

よって, 平面 ABM は辺 CD と直交する. ■



2 直線 AP, BP の傾きをそれぞれ $\tan \alpha$, $\tan \beta$ とすると $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$

$$\tan \alpha = \frac{x-1}{x}, \quad \tan \beta = \frac{x-2}{x} \quad (x > 0)$$

$\angle APB = \alpha - \beta$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \angle APB &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x}}{1 + \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}} = \frac{x}{2x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3} \end{aligned}$$

ここで, $x > 0$ であるから, 相加・相乗平均の大小関係により

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \tan \angle APB \leq 1$$

したがって $0 < \angle APB \leq \frac{\pi}{4}$ よって $\angle APB$ の最大値は $\frac{\pi}{4}$

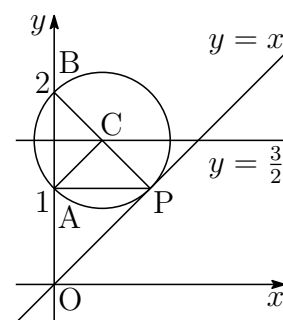
補足 $\triangle ABP$ の外接円の半径を R とすると, $\sin \angle APB = \frac{AB}{2R}$ より, R が最小となる
とき ($\triangle ABP$ の外接円が直線 $y = x$ と接する), $\angle APB$ は最大となる.

$\triangle ABP$ の外心は線分 AB の垂直二等分線上にある
から, 外心を $C\left(c, \frac{3}{2}\right)$ とおくと ($c > 0$)

$$AC = \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}}, \quad PC = \frac{\left|c - \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}}$$

$c > 0$ に注意して, $AC = PC$ を解くと $c = \frac{1}{2}$

このとき, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ゆえに $\angle APB = \frac{\pi}{4}$



■

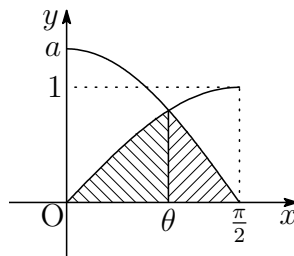
3 $S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2, \quad S : T = 3 : 1 \text{ より } T = \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における 2 曲線

$$y = \sin x, \quad y = a \cos x$$

の交点の x 座標を θ とすると

$$\sin \theta = a \cos \theta$$



上式の両辺を平方して $\sin^2 \theta = a^2 \cos^2 \theta$ ゆえに $(a^2 + 1) \cos^2 \theta = 1$

$\cos \theta > 0$ であるから $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ また $\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

面積 T は右の図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\theta} \sin x \, dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} a \cos x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\theta} + a \left[\sin x \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \cos \theta + a(1 - \sin \theta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} + a \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right) \\ &= a + 1 - \frac{a^2 + 1}{\sqrt{a^2 + 1}} = a + 1 - \sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

$T = \frac{2}{3}$ より $a + 1 - \sqrt{a^2 + 1} = \frac{2}{3}$ ゆえに $a + \frac{1}{3} = \sqrt{a^2 + 1}$

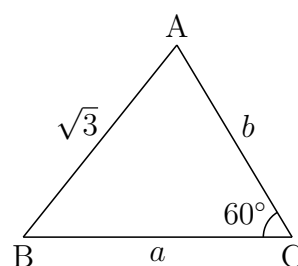
したがって $\left(a + \frac{1}{3} \right)^2 = a^2 + 1$ $a > 0$ に注意してこれを解くと $a = \frac{4}{3}$ ■

4 正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C} = 2.1$$

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから

$\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $C = 60^\circ$



$\sin A = \frac{a}{2}$ ゆえに $\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}$

第 1 余弦定理により

$$b = c \cos A + a \cos C = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2} + a \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3(4 - a^2)} + a}{2}$$

■

5 (1) $a = 2^n$ より

$$\begin{aligned} 3^a - 1 &= 3^{2^n} - 1 = (3^{2^{n-1}} + 1)(3^{2^{n-1}} - 1) \\ &= (3^{2^{n-1}} + 1)(3^{2^{n-2}} + 1) \cdots (3^{2^2} + 1)(3^2 + 1)(3 + 1)(3 - 1) \\ &= 8 \prod_{k=1}^{n-1} (3^{2^k} + 1) \cdots (*) \end{aligned}$$

ここで, $k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} 3^{2^k} + 1 &\equiv 1^{2^k} + 1 \equiv 0 \pmod{2} \\ 3^{2^k} + 1 &\equiv (-1)^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{4} \end{aligned}$$

上の 2 式より, $\frac{3^{2^k} + 1}{2}$ は奇数であるから

$$3^a - 1 = 8 \cdot 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3^{2^k} + 1}{2} = 2^{n+2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3^{2^k} + 1}{2}$$

は, 2^{n+2} で割り切れるが, 2^{n+3} では割り切れない.

(2) 正の偶数 m を $m = b \cdot 2^l$ (b を正の奇数, l を自然数) とすると

$$\begin{aligned} 3^m - 1 &= (3^b)^{2^l} - 1 \\ &= ((3^b)^{2^{l-1}} + 1)((3^b)^{2^{l-2}} + 1) \cdots ((3^b)^{2^2} + 1)((3^b)^2 + 1)(3^b + 1)(3^b - 1) \end{aligned}$$

(i) $b = 1$ のとき, (1) の結果を利用すると

$$3^m - 1 = 2^{l+2} \prod_{k=1}^{l-1} \frac{3^{2^k} + 1}{2}$$

が 2^m , すなわち, 2^{2^l} で割り切れるから, $l + 2 - 2^l$ は 0 以上の整数である. $f(l) = l + 2 - 2^l$ とおくと, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$

$$l \geq 3 \text{ のとき } f(l) = l + 2 - \sum_{k=0}^l {}_lC_k = - \sum_{k=2}^{l-1} {}_lC_k < 0$$

したがって $l = 1, 2$ よって $m = 2, 4$

(ii) $b \geq 3$ の奇数のとき, $b = 2c + 1$ (c は自然数) とおくと

$$\begin{aligned} 3^b + 1 &= 3^{2c+1} + 1 = 3 \cdot 9^c + 1 \equiv 3 \cdot 1 + 1 \equiv 4 \pmod{8} \\ 3^b - 1 &\equiv (-1)^b - 1 = -1 - 1 \equiv 2 \pmod{4} \\ (3^b)^{2^k} + 1 &\equiv \{(-1)^b\}^{2^k} + 1 = (-1)^{2^k} + 1 = 2 \pmod{4} \end{aligned}$$

$3^m - 1$ は $2^{(l-1)+2+1} = 2^{l+2}$ を因数にもち, これが 2^m , すなわち, $2^{b \cdot 2^l}$ で割り切れるから, $l + 2 - b \cdot 2^l$ は 0 以上の整数となる. $f(l) \leq 1$ より

$$l + 2 - b \cdot 2^l = f(l) + (1 - b)2^l \leq 1 - 2^{l+1} < 0$$

条件を満たす b, l は存在しない.

(i),(ii) より $\mathbf{m = 2, 4}$ ■

6 $p_n = \frac{2n P_n}{(2n)^n}$ であるから

$$\log p_n = \log \frac{2n P_n}{(2n)^n} = \log \left(\frac{n+n}{2n} \cdot \frac{n+(n-1)}{2n} \cdots \frac{n+1}{2n} \right) = \sum_{k=1}^n \log \frac{n+k}{2n}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{n+k}{2n} = \int_0^1 \log \frac{1+x}{2} dx \\ &= \int_0^1 (1+x)' \log \frac{1+x}{2} dx \\ &= \left[(1+x) \log \frac{1+x}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 dx = \mathbf{\log 2 - 1} \end{aligned}$$
■

7 k 番目の数を a_k とすると ($k = 1, 2, 3, 4, 5$)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$$

$$a_4 + a_5 = a_1 + a_2 \text{ であるから } 2(a_1 + a_2) + a_3 = 15$$

a_3 は奇数あるから, $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$ の組合せは次のようになる.

(i) $a_3 = 1$ のとき $2 + 5 = 3 + 4$

(ii) $a_3 = 3$ のとき $1 + 5 = 2 + 4$

(iii) $a_3 = 5$ のとき $1 + 4 = 2 + 3$

(i) のとき, (a_1, a_2, a_4, a_5) の組合せの総数は $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (通り)

(ii),(iii) の場合も同様であるから, 求める確率は

$$\frac{3 \cdot 8}{5!} = \frac{1}{5}$$



8 正の整数 n に対して

$$0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^n a_k \quad \cdots (*)$$

を満たしているとき, すべての自然数 n に対して

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n = 0$$

を (A) とする.

[1] $n = 1$ のとき, (*) より

$$0 \leq 3a_1 \leq a_1 \quad \text{すなわち} \quad a_1 = 0$$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成立する.

[2] $n = m$ のとき, (A) が成立すると仮定すると, (*) より

$$0 \leq 3a_{m+1} \leq \sum_{k=1}^{m+1} a_k = a_{m+1} \quad \text{ゆえに} \quad a_{m+1} = 0$$

よって, $n = m + 1$ のときも (A) が成立する.

[1], [2] からすべての自然数 n に対して, (A) が成立する. ■

- 9 線分 OF 上の点 $P(t, t, t)$ を通り, OF に垂直な平面と直線 OA との交点を $Q(q, 0, 0)$ とすると ($0 \leq q \leq 1$), $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{PQ}$ であるから

$$1(q - t) + 1(-t) + 1(-t) = 0$$

$$\text{ゆえに } q = 3t, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2t, -t, -t), \quad |\overrightarrow{PQ}|^2 = 6t^2$$

$P(t, t, t)$ を通り, OF に垂直な平面と直線 AB との交点を $R(1, r, 0)$ とすると ($0 \leq r \leq 1$), $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{PR}$ であるから

$$1(1 - t) + 1(r - t) + 1(-t) = 0 \quad \text{ゆえに } r = 3t - 1 \quad \left(\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - t, 2t - 1, -t), \quad |\overrightarrow{PR}|^2 = 6t^2 - 6t + 2$$

$P(t, t, t)$ を通り, OF に垂直な平面と直線 BF との交点を $S(1, 1, s)$ とすると ($0 \leq s \leq 1$), $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{PS}$ であるから

$$1(1 - t) + 1(1 - t) + 1(s - t) = 0 \quad \text{ゆえに } s = 3t - 2 \quad \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 1\right)$$

$$\overrightarrow{PS} = (1 - t, 1 - t, 2t - 2), \quad |\overrightarrow{PS}|^2 = 6(t - 1)^2$$

$$\text{ここで } d^2 = \begin{cases} 6t^2 & (0 \leq t \leq \frac{1}{3}) \\ 6t^2 - 6t + 2 & (\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}) \\ 6(t - 1)^2 & (\frac{2}{3} \leq t \leq 1) \end{cases} \quad \text{とおくと, } d^2 \text{ は } t = \frac{1}{2} \text{ に関して対}$$

称である. $u = OP$ とおくと, $u = \sqrt{3}t$ より

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{3} \quad \begin{array}{c|c} u & 0 \longrightarrow \sqrt{3} \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} d^2 du = \sqrt{3}\pi \int_0^1 d^2 dt \\ &= 2\sqrt{3}\pi \int_0^{\frac{1}{3}} 6t^2 dt + 2\sqrt{3}\pi \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left\{ 6\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\} dt \\ &= 2\sqrt{3}\pi \left[2t^3 \right]_0^{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{3}\pi \left[2\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{t}{2} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

■

