

平成20年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系)

- 理・医 [医学科]・薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系) 1 2 3 4 5 6
数 I・II・III・A・B・C (150 分)
- 医 [人間健康科学科]・教育 (理系) 1 2 5 7 8 9
数 I・II・III・A・B・C (150 分)

- 1 直線 $y = px + q$ が関数 $y = \log x$ のグラフと共有点を持たないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ.
- 2 正四面体 ABCD を考える. 点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し, 1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに, 等しい確率で動くとする. このとき, 時刻 0 から時刻 n までの間に, 4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ. ただし n は 1 以上の整数とする.
- 3 空間の 1 点 O を通る 4 直線で, どの 3 直線も同一平面上にないものを考える. このとき, 4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で, 4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ.
- 4 定数 a は実数であるとする. 関数 $y = |x^2 - 2|$ と $y = |2x^2 + ax - 1|$ のグラフの共有点はいくつあるか. a の値によって分類せよ.
- 5 次の式で与えられる底面の半径が 2, 高さが 1 の円柱 C を考える.

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y = 1$ を含み, xy 平面と 45° の角をなす平面のうち, 点 $(0, 2, 1)$ を通るものを H とする. 円柱 C を平面 H で二つに分けると, 点 $(0, 2, 0)$ を含む方の体積を求めよ.

- 6 地球上の北緯 60° 東経 135° の地点を A, 北緯 60° 東経 75° の地点 B とする. A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1, R_2 を考える. R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする. R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする. R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ. ただし地球は完全な球体であるとし, 飛行機は高度 0 を飛ぶものとする. また必要があれば, 三角関数表を用いよ.

注: 大円とは, 球を球の中心を通る平面で切ったとき, その切り口にできる円のことである.

三角関数表(1)

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0.0°	0.0000	1.0000	0.0000	22.5°	0.3827	0.9239	0.4142
0.5°	0.0087	1.0000	0.0087	23.0°	0.3907	0.9205	0.4245
1.0°	0.0175	0.9998	0.0175	23.5°	0.3987	0.9171	0.4348
1.5°	0.0262	0.9997	0.0262	24.0°	0.4067	0.9135	0.4452
2.0°	0.0349	0.9994	0.0349	24.5°	0.4147	0.9100	0.4557
2.5°	0.0436	0.9990	0.0437	25.0°	0.4226	0.9063	0.4663
3.0°	0.0523	0.9986	0.0524	25.5°	0.4305	0.9026	0.4770
3.5°	0.0610	0.9981	0.0612	26.0°	0.4384	0.8988	0.4877
4.0°	0.0698	0.9976	0.0699	26.5°	0.4462	0.8949	0.4986
4.5°	0.0785	0.9969	0.0787	27.0°	0.4540	0.8910	0.5095
5.0°	0.0872	0.9962	0.0875	27.5°	0.4617	0.8870	0.5206
5.5°	0.0958	0.9954	0.0963	28.0°	0.4695	0.8829	0.5317
6.0°	0.1045	0.9945	0.1051	28.5°	0.4772	0.8788	0.5430
6.5°	0.1132	0.9936	0.1139	29.0°	0.4848	0.8746	0.5543
7.0°	0.1219	0.9925	0.1228	29.5°	0.4924	0.8704	0.5658
7.5°	0.1305	0.9914	0.1317	30.0°	0.5000	0.8660	0.5774
8.0°	0.1392	0.9903	0.1405	30.5°	0.5075	0.8616	0.5890
8.5°	0.1478	0.9890	0.1495	31.0°	0.5150	0.8572	0.6009
9.0°	0.1564	0.9877	0.1584	31.5°	0.5225	0.8526	0.6128
9.5°	0.1650	0.9863	0.1673	32.0°	0.5299	0.8480	0.6249
10.0°	0.1736	0.9848	0.1763	32.5°	0.5373	0.8434	0.6371
10.5°	0.1822	0.9833	0.1853	33.0°	0.5446	0.8387	0.6494
11.0°	0.1908	0.9816	0.1944	33.5°	0.5519	0.8339	0.6619
11.5°	0.1994	0.9799	0.2035	34.0°	0.5592	0.8290	0.6745
12.0°	0.2079	0.9781	0.2126	34.5°	0.5664	0.8241	0.6873
12.5°	0.2164	0.9763	0.2217	35.0°	0.5736	0.8192	0.7002
13.0°	0.2250	0.9744	0.2309	35.5°	0.5807	0.8141	0.7133
13.5°	0.2334	0.9724	0.2401	36.0°	0.5878	0.8090	0.7265
14.0°	0.2419	0.9703	0.2493	36.5°	0.5948	0.8039	0.7400
14.5°	0.2504	0.9681	0.2586	37.0°	0.6018	0.7986	0.7536
15.0°	0.2588	0.9659	0.2679	37.5°	0.6088	0.7934	0.7673
15.5°	0.2672	0.9636	0.2773	38.0°	0.6157	0.7880	0.7813
16.0°	0.2756	0.9613	0.2867	38.5°	0.6225	0.7826	0.7954
16.5°	0.2840	0.9588	0.2962	39.0°	0.6293	0.7771	0.8098
17.0°	0.2924	0.9563	0.3057	39.5°	0.6361	0.7716	0.8243
17.5°	0.3007	0.9537	0.3153	40.0°	0.6428	0.7660	0.8391
18.0°	0.3090	0.9511	0.3249	40.5°	0.6494	0.7604	0.8541
18.5°	0.3173	0.9483	0.3346	41.0°	0.6561	0.7547	0.8693
19.0°	0.3256	0.9455	0.3443	41.5°	0.6626	0.7490	0.8847
19.5°	0.3338	0.9426	0.3541	42.0°	0.6691	0.7431	0.9004
20.0°	0.3420	0.9397	0.3640	42.5°	0.6756	0.7373	0.9163
20.5°	0.3502	0.9367	0.3739	43.0°	0.6820	0.7314	0.9325
21.0°	0.3584	0.9336	0.3839	43.5°	0.6884	0.7254	0.9490
21.5°	0.3665	0.9304	0.3939	44.0°	0.6947	0.7193	0.9657
22.0°	0.3746	0.9272	0.4040	44.5°	0.7009	0.7133	0.9827
22.5°	0.3827	0.9239	0.4142	45.0°	0.7071	0.7071	1.0000

三角関数表 (2)

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
45.0°	0.7072	0.7072	1.0000	67.5°	0.9239	0.3827	2.4142
45.5°	0.7133	0.7009	1.0176	68.0°	0.9272	0.3746	2.4751
46.0°	0.7193	0.6947	1.0355	68.5°	0.9304	0.3665	2.5386
46.5°	0.7254	0.6884	1.0538	69.0°	0.9336	0.3584	2.6051
47.0°	0.7314	0.6820	1.0724	69.5°	0.9367	0.3502	2.6746
47.5°	0.7373	0.6756	1.0913	70.0°	0.9397	0.3420	2.7475
48.0°	0.7431	0.6691	1.1106	70.5°	0.9426	0.3338	2.8239
48.5°	0.7490	0.6626	1.1303	71.0°	0.9455	0.3256	2.9042
49.0°	0.7547	0.6561	1.1504	71.5°	0.9483	0.3173	2.9887
49.5°	0.7604	0.6494	1.1708	72.0°	0.9511	0.3090	3.0777
50.0°	0.7660	0.6428	1.1918	72.5°	0.9537	0.3007	3.1716
50.5°	0.7716	0.6361	1.2131	73.0°	0.9563	0.2924	3.2709
51.0°	0.7771	0.6293	1.2349	73.5°	0.9588	0.2840	3.3759
51.5°	0.7826	0.6225	1.2572	74.0°	0.9613	0.2756	3.4874
52.0°	0.7880	0.6157	1.2799	74.5°	0.9636	0.2672	3.6059
52.5°	0.7934	0.6088	1.3032	75.0°	0.9659	0.2588	3.7321
53.0°	0.7986	0.6018	1.3270	75.5°	0.9681	0.2504	3.8667
53.5°	0.8039	0.5948	1.3514	76.0°	0.9703	0.2419	4.0108
54.0°	0.8090	0.5878	1.3764	76.5°	0.9724	0.2334	4.1653
54.5°	0.8141	0.5807	1.4019	77.0°	0.9744	0.2250	4.3315
55.0°	0.8192	0.5736	1.4281	77.5°	0.9763	0.2164	4.5107
55.5°	0.8241	0.5664	1.4550	78.0°	0.9781	0.2079	4.7046
56.0°	0.8290	0.5592	1.4826	78.5°	0.9799	0.1994	4.9152
56.5°	0.8339	0.5519	1.5108	79.0°	0.9816	0.1908	5.1446
57.0°	0.8387	0.5446	1.5399	79.5°	0.9833	0.1822	5.3955
57.5°	0.8434	0.5373	1.5697	80.0°	0.9848	0.1736	5.6713
58.0°	0.8480	0.5299	1.6003	80.5°	0.9863	0.1650	5.9758
58.5°	0.8526	0.5225	1.6319	81.0°	0.9877	0.1564	6.3138
59.0°	0.8572	0.5150	1.6643	81.5°	0.9890	0.1478	6.6912
59.5°	0.8616	0.5075	1.6977	82.0°	0.9903	0.1392	7.1154
60.0°	0.8660	0.5000	1.7321	82.5°	0.9914	0.1305	7.5958
60.5°	0.8704	0.4924	1.7675	83.0°	0.9925	0.1219	8.1443
61.0°	0.8746	0.4848	1.8040	83.5°	0.9936	0.1132	8.7769
61.5°	0.8788	0.4772	1.8418	84.0°	0.9945	0.1045	9.5144
62.0°	0.8829	0.4695	1.8807	84.5°	0.9954	0.0958	10.385
62.5°	0.8870	0.4617	1.9210	85.0°	0.9962	0.0872	11.430
63.0°	0.8910	0.4540	1.9626	85.5°	0.9969	0.0785	12.706
63.5°	0.8949	0.4462	2.0057	86.0°	0.9976	0.0698	14.301
64.0°	0.8988	0.4384	2.0503	86.5°	0.9981	0.0610	16.350
64.5°	0.9026	0.4305	2.0965	87.0°	0.9986	0.0523	19.081
65.0°	0.9063	0.4226	2.1445	87.5°	0.9990	0.0436	22.904
65.5°	0.9100	0.4147	2.1943	88.0°	0.9994	0.0349	28.636
66.0°	0.9135	0.4067	2.2460	88.5°	0.9997	0.0262	38.188
66.5°	0.9171	0.3987	2.2998	89.0°	0.9998	0.0175	57.290
67.0°	0.9205	0.3907	2.3559	89.5°	1.0000	0.0087	114.59
67.5°	0.9239	0.3827	2.4142	90.0°	1.0000	0.0000	—

- 7 $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を考える．辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を， $AN : NB = 2 : 1$ となるようにとる．このとき $\angle BCM = \angle BCN$ となることを示せ．ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする．

- 8 定数 a は実数であるとする．方程式

$$(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$$

を満たす実数 x はいくつあるか． a の値によって分類せよ．

- 9 空間内に原点 O を中心とし半径 1 の球面 S を考え， S 上の 2 点を $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $B\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とする． $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ で与えられる平面で S を切った切り口の円において， A と B を結ぶ弧のうち短い方の長さを ℓ_1 とする．また 3 点 O ， A ， B を通る平面で S を切った切り口の円において， A と B を結ぶ弧のうち短い方を長さを ℓ_2 とする．このとき $\ell_1 > \ell_2$ を証明せよ．

解答例

1 (i) $p < 0$ のとき

$y = px + q$ は単調減少, $y = \log x$ は単調増加で

$$\lim_{x \rightarrow +0} (px + q) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

このとき, 直線 $y = px + q$ と関数 $y = \log x$ のグラフは共有点をもつ.

(ii) $p = 0$ のとき, 点 (e^q, q) が $y = px + q$ と $y = \log x$ のグラフの共有点.

(iii) $p > 0$ のとき, $f(x) = px + q - \log x$ とおくと

$$f'(x) = p - \frac{1}{x} = \frac{px - 1}{x}$$

x	(0)	$\dots$	$\frac{1}{p}$	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき, $f\left(\frac{1}{p}\right) > 0$ を満たせばよいから

$$p \cdot \frac{1}{p} + q - \log \frac{1}{p} > 0 \quad \text{すなわち} \quad 1 + q + \log p > 0$$

(i)~(iii) より, 求める必要十分条件は

$$p > 0, \quad 1 + q + \log p > 0$$



- 2** X, Y を A 以外の頂点とする ($X \neq Y$).

時刻 n までに 2 頂点 A, X のみに点 P が現れる確率を p_2 とすると

$$p_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

時刻 n までに 3 頂点 A, X, Y のすべてに点 P が現れる確率を p_3 とすると

$$p_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2p_2$$

時刻 n までに 4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を p とすると

$$\begin{aligned} p &= 1 - {}_3C_1 \cdot p_2 - {}_3C_2 \cdot p_3 \\ &= 1 - 3p_2 - 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2p_2 \right\} \\ &= 1 + 3p_2 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

■

- 3** 4 直線上にそれぞれに原点でない 4 点 A, B, C, D を取ったとき, 条件から $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は 1 次独立である. 点 D に対して

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

を満たすように, 3 点 A, B, C をとることができる. $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$ とおくと

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'A}$$

このとき, 四角形 AB'CD は平行四辺形である.

■

4 $y = |x^2 - 2|$, $y = |2x^2 + ax - 1|$ から y を消去すると

$$|x^2 - 2| = |2x^2 + ax - 1| \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 + ax - 1 = \pm(x^2 - 2)$$

すなわち $3x^2 + ax - 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$ または $x^2 + ax + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$

①, ② の判別式をそれぞれ D_1 , D_2 とすると

$$D_1 = a^2 + 36 > 0, \quad D_2 = a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$$

①, ② が共通解をもつとき, これを p とおくと

$$3p^2 + ap - 3 = 0, \quad p^2 + ap + 1 = 0$$

上の 2 式から $p = \pm\sqrt{2}$, $a = \mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (複号同順)

よって $|a| < 2$ のとき 2 個

$|a| = 2$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 3 個

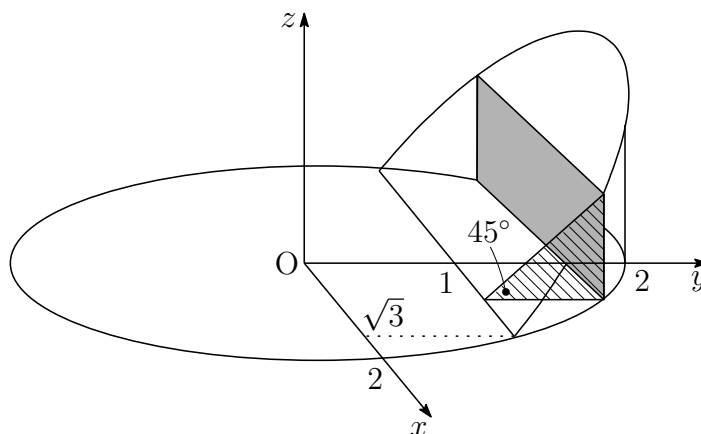
$2 < |a| < \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2} < |a|$ のとき 4 個



5 求める立体は次の領域である.

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq y - 1\}$$

D の平面 $y = t$ ($1 \leq t \leq 2$) による断面 (長方形) 積は $2\sqrt{4-t^2}(t-1)$

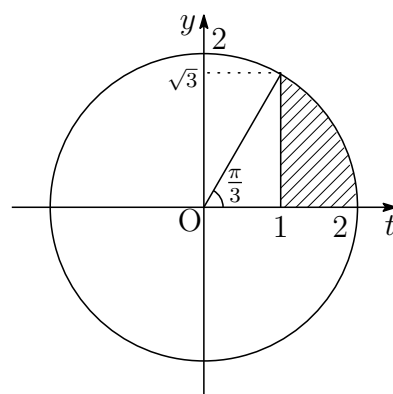


よって, 求める立体の体積を V とすると

$$V = \int_1^2 2\sqrt{4-t^2}(t-1) dt = \int_1^2 2t\sqrt{4-t^2} dt - 2 \int_1^2 \sqrt{4-t^2} dt$$

このとき

$$\begin{aligned} \int_1^2 2t\sqrt{4-t^2} dt &= \left[-\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= 2\sqrt{3}, \\ \int_1^2 \sqrt{4-t^2} dt &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



$$\text{よって } V = 2\sqrt{3} - 2 \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$

別解 D の平面 $x = t$ ($-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$) による断面 (直角二等辺三角形) 積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}-1)^2 = \frac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2}) dt = \int_0^{\sqrt{3}} (5-t^2-2\sqrt{4-t^2}) dt \\ &= \left[5t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} - 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2} dt = 4\sqrt{3} - 2 \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

■

- 6 地球の半径を R とすると、同じ緯度にある 2 地点 A, B の地軸からの距離は

$$R \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$$

$135^\circ - 75^\circ = 60^\circ$, すなわち, $\frac{\pi}{3}$ より

$$R_1 = \frac{R}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi R}{6}$$

2 地点 A, B を通り, 地軸と垂直な平面の地軸との交点を C とすると, $\triangle ABC$ は一辺の長さが $\frac{R}{2}$ の正三角形である.

地球の中心を O, 2 地点 A, B の中点を M とし, $\theta = \angle AOM$ とすると

$$OA = R, \quad AM = \frac{R}{4}, \quad \angle AMO = \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \theta = \frac{1}{4}$$

三角比の表から $\frac{14.0}{180}\pi < \theta < \frac{14.5}{180}\pi$ ゆえに $R_2 = R \cdot 2\theta < \frac{29\pi R}{180}$

したがって $\frac{R_2}{R_1} = \frac{29}{30} < \frac{291}{300} = \frac{97}{100}$

よって, R_2 は R_1 より 3%以上短くなる. ■

- 7 辺 AC の中点を L とする.
 $\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから

$$\angle MBC = \angle LCB, \quad MB = LC$$

$\triangle MBC$ と $\triangle LCB$ において, BC は共通より

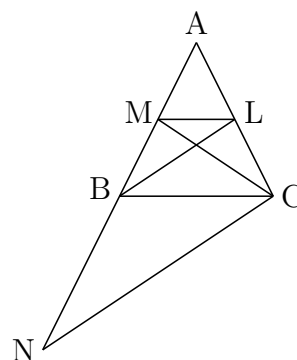
$$\triangle MBC \equiv \triangle LCB$$

したがって $\angle BCM = \angle CBL \quad \dots \textcircled{1}$

2 点 B, L は 2 辺 AN, AC のそれぞれの中点であるから, 中点連結定理により

$$BL \parallel NC \quad \text{ゆえに} \quad \angle CBL = \angle BCN \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より $\angle BCM = \angle BCN$ ■



8 2つの2次方程式

$$\begin{cases} 3x^2 + ax - 3 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + ax + 1 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると

$$D_1 = a^2 + 36 > 0, \quad D_2 = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$$

①, ②が共通解をもつとき, これを p とおくと

$$3p^2 + ap - 3 = 0, \quad p^2 + ap + 1 = 0$$

上の2式から $p = \pm\sqrt{2}, a = \mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (複号同順)

よって $|a| < 2$ のとき 2個

$|a| = 2, \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 3個

$2 < |a| < \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} < |a|$ のとき 4個

■

9 $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に対して, $C\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ をとると

$$\angle ACB = \frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad l_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \angle AOB \text{ とすると } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{7}{8}$$

$$7 > 4\sqrt{3} \text{ であるから } \cos \theta = \frac{7}{8} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \cos \frac{\pi}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$\text{したがって } l_2 = 1 \cdot \theta < \frac{\pi}{6} \quad \text{よって} \quad l_1 > l_2$$

■