平成 19 年度　京都大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

- 理·医 [医学科]·薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系) 1 2 3 4 5 6
  数 I・II・III・A・B・C (150 分)
- 医 [人間健康科学科]・教育 (理系) 2 3 7 8 9 10
  数 I・II・III・A・B・C (150 分)

1 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ を求めよ．

(2) 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき，1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする．15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか．

2 x，y を相異なる正の実数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定めるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面の点 $(x,\ y)$ の範囲を図示せよ．

3 p を 3 以上の素数とする．4 個の整数 a，b，c，d が次の 3 条件

$$a+b+c+d = 0, \quad ad-bc+p = 0, \quad a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき，a，b，c，d を p を用いて表せ．

4 点 O を中心とする円に内接する △ABC の 3 辺 AB，BC，CA をそれぞれ 2 : 3 に内分する点を P，Q，R とする．△PQR の外心が点 O と一致するとき，△ABC はどのような三角形か．

5 A を 2 次の正方行列とする．列ベクトル $\vec{x}_0$ に対し，列ベクトル $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\cdots$ を

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

によって定める．ある零ベクトルではない $\vec{x}_0$ について，3 以上の自然数 m で初めて $\vec{x}_m$ が $\vec{x}_0$ と一致するとき，行列 A^m は単位行列であることを示せ．

6 すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a，b に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている．

(1) 任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ．

(2) $y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ．

7 次の各問にそれぞれ答えよ．

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，
$A^6+2A^4+2A^3+2A^2+2A+3E$ を求めよ．

(2) 得点 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ が等しい確率で得られるゲームを独立に 3 回くり返す．このとき，2 回目の得点が 1 回目の得点以上であり，さらに 3 回目の得点が 2 回目の得点以上となる確率を求めよ．

8 △ABC において，∠A の二等分線とこの三角形の外接円の交点で A と異なる点を A′ とする．同様に ∠B，∠C の二等分線とこの外接円との交点をそれぞれ B′，C′ とする．このとき 3 直線 AA′，BB′，CC′ は 1 点 H で交わり，この点 H は三角形 A′B′C′ の垂心と一致することを証明せよ．

9 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．座標平面上で原点の回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転する 1 次変換を f とし，直線 $y=(\tan\alpha)x$ について対称移動する 1 次変換を g とする．合成変換 $f\circ g$ が x 軸について対称移動する 1 次変換と一致するとき，α の値を求めよ．

10 $y=xe^{1-x}$ と $y=x$ のグラフで囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ．

解答例

1 (1) $$\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \left[\, 2\sqrt{x^2+4} + \log(x+\sqrt{x^2+4}) \,\right]_0^2$$
$$= \mathbf{4(\sqrt{2}-1) + \log(1+\sqrt{2})}$$

補足 $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+A}\,) + C \quad (A \text{ は定数, } C \text{ は積分定数})$$

(2) n 段の階段を昇る昇り方の総数を a_n とする.

- 最初に 1 段昇ったとき，残りの $n-1$ 段を昇る a_{n-1} 通り.
- 最初に 2 段，1 段と昇ったとき，残りの $n-3$ 段を昇る a_{n-3} 通り.

したがって，次の漸化式が成立する.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-3} \quad (n \geqq 4)$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277

よって，求める場合の数は　**277** (通り)

別解 1 段昇ることを A，2 段昇ることを B とし，A，B の組合せは，B が隣り合わないことに注意すると次のようになる.

A	15	13	11	9	7	5
B	0	1	2	3	4	5

一列に並んだ A の両側およびその間に B を配置する場合の数であるから (例：A = 9，B = 3 のとき，先ず A を 9 個並べ，A の間とその両側の 10 か所から 3 カ所を選んで B を並べる ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り)

$$\begin{aligned} & 1 + {}_{14}\mathrm{C}_1 + {}_{12}\mathrm{C}_2 + {}_{10}\mathrm{C}_3 + {}_{8}\mathrm{C}_4 + {}_{6}\mathrm{C}_5 \\ =& 1 + 14 + 66 + 120 + 70 + 6 \\ =& \mathbf{277} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

■

2 $a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}$ より ($x,\ y$ は相異なる正の実数)

$$\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}-\frac{a_n}{x^n}=\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$a_1=0$，$\dfrac{y}{x}\neq 1$ に注意して

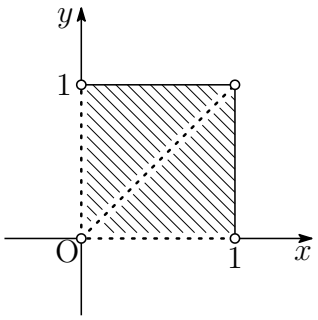
$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{x^{k+1}}-\frac{a_k}{x^k}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{k+1}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{a_n}{x^n}=\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}}{1-\frac{y}{x}}$$

したがって　　$a_n=\dfrac{y^2(x^{n-1}-y^{n-1})}{x-y}$

よって，求める点 $(x,\ y)$ は

$$-1<x\leqq 1,\quad -1<y\leqq 1,\quad x\neq y$$

点 $(x,\ y)$ の表す領域は，右の図の斜線部分と実線部分である (点線部分と ◦ は含まない).



■

3 $a+b+c+d=0,\quad ad-bc+p=0,\quad a\geqq b\geqq c\geqq d\qquad \cdots(*)$

$(*)$ の第 1 式から，$d=-(a+b+c)$．これを第 2 式に代入すると

$$-a(a+b+c)-bc+p=0\quad \text{ゆえに}\quad (a+b)(a+c)=p\quad \cdots(**)$$

$a\geqq b\geqq c\geqq d$ より　　$a+b\geqq c+d$

$(*)$ の第 1 式より，$c+d=-(a+b)$ を上式に代入すると

$$a+b\geqq -(a+b)\quad \text{ゆえに}\quad a+b\geqq 0$$

$(**)$ より　　$a+b=p,\ \ a+c=1$

したがって，$b=p-a$，$c=1-a$ を $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$a+(p-a)+(1-a)+d=0\quad \text{ゆえに}\quad d=a-p-1$$

$(*)$ の第 3 式により

$$a\geqq p-a\geqq 1-a\geqq a-p-1\quad \text{ゆえに}\quad \frac{p}{2}\leqq a\leqq \frac{p+2}{2}$$

p は奇素数より　$\boldsymbol{a=\dfrac{p+1}{2},\ \ b=\dfrac{p-1}{2},\ \ c=-\dfrac{p-1}{2},\ \ d=-\dfrac{p+1}{2}}$

別解 $a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0$ より　$a+d=-(b+c),\ ad=bc-p$

$a,\ d$ を解とする 2 次方程式は　$x^2+(b+c)x+(bc-p)=0$

これを解いて　　$x=\dfrac{-(b+c)\pm\sqrt{(b-c)^2+4p}}{2}$

$a \geqq d$ より，$a-d=\sqrt{(b-c)^2+4p}$ であるから

$$(a-d)^2=(b-c)^2+4p \quad \text{ゆえに} \quad (a-d+b-c)(a-d-b+c)=4p$$

$a-d+b-c=a-d-b+c+2(b-c)$ であるから，$a-d+b-c$ と $a-d-b+c$ の偶奇が一致することに注意して $(a \geqq b \geqq c \geqq d)$

$$a-d+b-c=2p, \quad a-d-b+c=2$$

ゆえに　　$a-d=p+1, \quad b-c=p-1 \qquad \cdots(*)$

これらを $(a-b)+(b-c)+(c-d)=a-d$ に代入すると

$$(a-b)+p-1+(c-d)=p+1 \quad \text{ゆえに} \quad (a-b)+(c-d)=2$$

$c-d=k$ とおくと $(k=0,\ 1,\ 2)$，$a-b=2-k$ であるから，$(*)$ より

$$a=d+p+1, \quad b=d+p+k-1, \quad c=d+k$$

これらを $a+b+c+d=0$ に代入すると

$$(d+p+1)+(d+p+k-1)+(d+k)+d=0 \quad \text{ゆえに} \quad d=-\frac{p+k}{2}$$

したがって

$$a=\frac{p-k+2}{2}, \quad b=\frac{p+k-2}{2}, \quad c=-\frac{p-k}{2}, \quad d=-\frac{p+k}{2}$$

p は奇素数，a，b，c，d は整数であるから，$k=1$ より

$$\boldsymbol{a=\frac{p+1}{2}, \quad b=\frac{p-1}{2}, \quad c=-\frac{p-1}{2}, \quad d=-\frac{p+1}{2}}$$

■

4 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=r$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{5},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3\vec{c}+2\vec{a}}{5}$$

したがって
$$25|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=13r^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$25|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=9|\vec{b}|^2+12\vec{b}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2=13r^2+12\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$25|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2=9|\vec{c}|^2+12\vec{c}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2=13r^2+12\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ であるから　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\quad\cdots(*)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=2r^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\qquad\cdots①$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=2r^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}\qquad\cdots②$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2=2r^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}\qquad\cdots③$$

$(*)$ および ①〜③ より　　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$

ゆえに　AB = BC = CA　よって　△ABC は正三角形 ■

5 $\vec{x}_{n+1}=A\vec{x}_n$ より $(n=0,1,2,\cdots)$

$$\vec{x}_m=A^m x_0\quad\text{条件から}\quad\vec{x}_0=A^m\vec{x}_0\quad\cdots①$$

上の第 2 式から

$$A\vec{x}_0=A^{m+1}\vec{x}_0=A^m(A\vec{x}_0)\quad\text{ゆえに}\quad\vec{x}_1=A^m\vec{x}_1\quad\cdots②$$

$k\neq 1$ とし，$\vec{x}_1=k\vec{x}_0$ と仮定すると，① より

$$\vec{x}_0=A^{m-1}(A\vec{x}_0)=A^{m-1}\vec{x}_1=kA^{m-1}\vec{x}_0\quad\text{ゆえに}\quad\vec{x}_0=k^m\vec{x}_0$$

したがって　$k^m=1$　すなわち　$k=-1$

このとき，$\vec{x}_1=-\vec{x}_0$ より，$A^2\vec{x}_0=\vec{x}_0$ となり，条件に反する．

これから，$\vec{x}_1$ は $\vec{x}_0$ と平行ではないから，①，② より

$$A^m\begin{pmatrix}\vec{x}_0 & \vec{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{x}_0 & \vec{x}_1\end{pmatrix}\quad\text{よって}\quad A^m=E$$

■

6 (1) $$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} \quad \cdots(*)$$

$(*)$ に $a=x$，$b=-x$ を代入すると

$$f(0)=\frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}$$

$f(0)=0$ より　$f(x)+f(-x)=0$　すなわち　$f(x)$ は奇関数

$f(c)=1$ を満たす c が存在すると仮定すると，$f(-c)=-1$ より

$$1+f(c)f(-c)=0$$

これは，与えられた条件に反するから　$f(x)\neq\pm1$

$f(x)$ が連続関数 (可微分) で，$f(0)=0$ であることから

$$-1<f(x)<1$$

よって，任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$

(2) $(*)$ より

$$f(x+h)-f(x)=\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)=\frac{1-f(x)^2}{1+f(x)f(h)}\cdot f(h)$$

$f(0)=0$，$f'(0)=1$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{1-f(x)^2}{1+f(x)f(h)}\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}=\{1-f(x)^2\}f'(0)\\&=1-f(x)^2 \quad \cdots(**)\end{aligned}$$

(1) の結果から，$f'(x)>0$ より　$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

$(**)$ を微分すると　　$f''(x)=-2f(x)f'(x)$

上式より，$x>0$ において，$f(x)>0$，$f'(x)>0$ であるから

$$f''(x)<0$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，$x>0$ で上に凸である．

解説 $-1<f(x)<1$，$f'(x)=1-f(x)^2$ より

$$\frac{f'(x)}{1+f(x)}+\frac{f'(x)}{1-f(x)}=2$$

これを積分すると

$$\log\{1+f(x)\}-\log\{1-f(x)\}=2x+C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

$f(0)=0$ より，$C=0$ であるから

$$\log\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=2x \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1+f(x)}{1-f(x)}=e^{2x} \quad \text{よって} \quad f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

■

7 (1) ハミルトン・ケーリーの定理を $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に適用すると

$$A^2-A+2E=O$$

したがって

$$\begin{aligned} &A^6+2A^4+2A^3+2A^2+2A+3E \\ =&(A^2-A+2E)(A^4+A^3+A^2+A+E)+A+E=A+E \\ =&\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

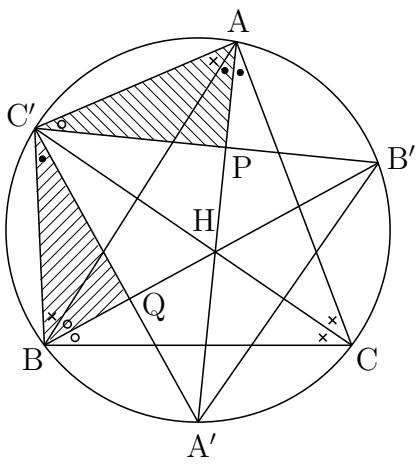
(2) 求める確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{H}_3}{n^3}=\frac{{}_{n+3-1}\mathrm{C}_3}{n^3}=\frac{(n+2)(n+1)n}{3!n^3}=\frac{\boldsymbol{(n+2)(n+1)}}{\boldsymbol{6n^2}}$$

■

8 △ABC において，$\angle A = 2\alpha$，$\angle B = 2\beta$，$\angle C = 2\gamma$ とおくと

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \quad \cdots (*)$$



2 直線 AA′ と B′C′ の交点を P とする．
円周角の定理により

$$\angle AC'B' = \angle ABB' = \beta$$
$$\angle BAC' = \angle BCC' = \gamma$$

△AC′P について

$$\angle AC'P = \beta, \quad \angle PAC' = \gamma + \alpha$$

上の 2 式と $(*)$ により

$$\angle C'PA = 180^\circ - \angle AC'P - \angle PAC' = 180^\circ - \beta - (\gamma + \alpha) = 90^\circ$$

したがって，2 直線 AA′ と B′C′ は直交する．

同様に，2 直線 BB′ と C′A′ の交点を Q とすると，$\angle BQC' = 90^\circ$．

したがって，2 直線 BB′ と C′A′ は直交する．

よって，H は △A′B′C′ の垂心である． ■

9 1 次変換 f，g の表す行列を F，G とすると

$$F = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$f \circ g$ の表す行列 FG は

$$FG = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) & \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) \\ \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) & -\cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

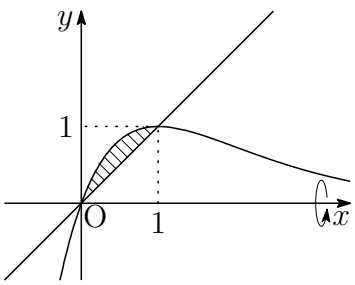
これが x 軸について対称移動を表す行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に等しいから

$$\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

これを $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ について解くと　　$\boldsymbol{\alpha = -\frac{\pi}{6}}$ ■

10 $xe^{1-x}-x=x(e^{1-x}-1)$ より，曲線 $y=e^{1-x}$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標は

$$x=0,\ 1$$



$0 \leqq x \leqq 1$ において　　$xe^{1-x} \geqq x$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^1 (xe^{1-x})^2\,dx-\int_0^1 x^2\,dx\\&=-\frac{1}{2}\left[\,e^{2-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1-\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_0^1\\&=\frac{e^2}{4}-\frac{19}{12}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\pi\left(\dfrac{e^2}{4}-\dfrac{19}{12}\right)}$

解説 部分積分法により，次式が得られる (C は積分定数).

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx=\frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int a^{px+q}f(x)\,dx=\frac{a^{px+q}}{p\log a}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p\log a}+\frac{f''(x)}{(p\log a)^2}-\frac{f'''(x)}{(p\log a)^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int e^{-x+q}f(x)\,dx=-e^{-x+q}\left\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\right\}+C$$

$$\int a^{-x+q}f(x)\,dx=-\frac{a^{-x+q}}{\log a}\left\{f(x)+\frac{f'(x)}{\log a}+\frac{f''(x)}{(\log a)^2}+\frac{f'''(x)}{(\log a)^3}+\cdots\right\}+C$$

したがって

$$\begin{aligned}\int x^2e^{2-2x}\,dx&=\frac{e^{2-2x}}{-2}\left\{x^2-\frac{(x^2)'}{-2}+\frac{(x^2)''}{(-2)^2}\right\}+C\\&=-\frac{1}{2}e^{2-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C\end{aligned}$$

■