平成18年度　京都大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理，医，薬，工，農，総合人間(理系)，経済(理系)

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $Q(x)$ を2次式とする．整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという．このとき2次方程式 $Q(x)=0$ は重解を持つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 点Oを原点とする座標空間の3点を $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(2,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{P}(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$ とする．線分OPと線分ABが交点を持つような実数 t が存在することを示せ．またそのとき，交点の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である．さらにこのグラフの $x \leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を頂点とし，原点を通る放物線と一致している．このとき $x=-1$ におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ に対し，辺AB上に点Pを，辺BC上に点Qを，辺CA上に点Rを，頂点とは異なるようにとる．この3点がそれぞれの辺上を動くとき，この3点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ として，関数 F を

$$F(\theta)=\int_0^{\theta} x\cos(x+\alpha)\,dx$$

で定める．θ が $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ の範囲を動くとき，F の最大値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $P(x)$ を 2 次式 $Q(x)$ で割った商を $A(x)$，余りを $R(x)$ とすると

$$(*)\quad P(x) = Q(x)A(x) + R(x) \quad (R(x)\text{ は }0\text{ でない }1\text{ 次以下の整式})$$

この両辺を平方すると

$$\begin{aligned} P(x)^2 &= \{Q(x)A(x)\}^2 + 2Q(x)A(x)R(x) + R(x)^2 \\ &= Q(x)\{Q(x)A(x)^2 + 2A(x)R(x)\} + R(x)^2 \end{aligned}$$

$P(x)^2$ は $Q(x)$ で割り切れるから，$R(x)^2$ は 2 次式 $Q(x)$ で割り切れる．
このとき，$R(x)^2$ は 2 次以下の整式であるから，定数 k を用いて

$$(**)\quad R(x)^2 = kQ(x)$$

上式において，$k = 0$ とすると，$R(x) = 0$ となり，$(*)$ に反するので不適．
したがって　$Q(x) = \dfrac{1}{k}R(x)^2$　　よって　$Q(x)$ は重解 $R^{-1}(0)$ をもつ．

別解 (背理法による証明)

2 次式 $Q(x)$ が重解をもたない，すなわち

$$Q(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) \quad (a \neq 0,\ \alpha \neq \beta)$$

とすると，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないから

$$P(\alpha) \neq 0 \quad \text{または} \quad P(\beta) \neq 0 \tag{A}$$

一方，$P(x)^2$ は $Q(x)$ で割り切れるから

$$P(\alpha)^2 = 0, \quad P(\beta)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad P(\alpha) = 0, \quad P(\beta) = 0$$

これは，(A) と矛盾する．(証終) ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ 両端を含む線分 OP 上の点は，実数 k を用いて $(0 \leqq k \leqq 1)$

$$k\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$$

両端を含む線分 AB 上の点は，実数 s を用いて $(0 \leqq s \leqq 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (0,\ 1,\ 2) + s(2,\ 2\ ,-2)\\ &= (2s,\ 1+2s,\ 2-2s)\end{aligned}$$

線分 OP と線分 AB の交点 $(x,\ y,\ z)$ は

$$(x,\ y,\ z) = k(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t) = (2s,\ 1+2s,\ 2-2s) \qquad (*)$$

次式を満たす s，t，k が存在することであるから

$$\begin{cases} k(5+t) = 2s & \cdots ① \\ k(9+2t) = 1+2s & \cdots ② \\ k(5+3t) = 2-2s & \cdots ③ \end{cases}$$

① $\times 3 -$ ② $\times 2 +$ ③ より

$$k\{3(5+t) - 2(9+2t) + (5+3t)\} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k(2+2t) = 0$$

$k=0$ のとき，①，②，③ を同時に満たす s は存在しないので不適．
したがって，$t=-1$ を ①，② に代入すると

$$4k = 2s, \quad 7k = 1+2s$$

s，k の値の範囲に注意してこれを解くと　$k = \dfrac{1}{3}$，$s = \dfrac{2}{3}$

このとき，$t=-1$，$k=\dfrac{1}{3}$，$s=\dfrac{2}{3}$ は ③ を満たす．

よって　$\boldsymbol{t = -1}$，交点の座標は，$(*)$ より $\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$ ■

$\boxed{3}$ 点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ を頂点とする放物線を $y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ とおくと，

これが原点を通るから　$a=-1$　ゆえに　$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\quad(x \leqq 0)$

$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称であるから

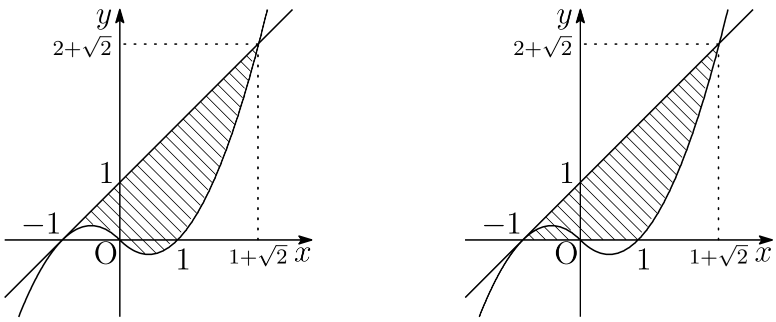
$$f(x)=\begin{cases} -\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} & (x \leqq 0) \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

$f(-1)=0$，$f'(x)=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ より $(x \leqq 0)$，$f'(-1)=1$

$x=-1$ における接線は，点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y=x+1$$

求める面積は，左図の斜線部分の面積で，右図の斜線部分の面積と等しい．



$x \geqq 0$ において，直線 $y=x+1$ と $y=f(x)=x^2-x$ の交点の x 座標は

$$x+1=x^2-x \quad \text{整理すると} \quad x^2-2x-1=0$$

$x \geqq 0$ に注意してこれを解くと　$x=1+\sqrt{2}$　ゆえに　接点は $(1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2})$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})^2-\int_1^{1+\sqrt{2}}(x^2-x)dx=3+2\sqrt{2}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\mathbf{2+\frac{4}{3}\sqrt{2}}$$

■

$\boxed{4}$ (i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき，n が素数であるのは，$n=3$ のときに限る．

(ii) $n \equiv \pm 1 \pmod 3$ のとき，$n^2+2 \equiv (\pm 1)^2+2 \equiv 0 \pmod 3$

$n \geqq 2$ より，$n^2+2 \geqq 6$ であるから，n^2+2 は6以上の3の倍数．

(i),(ii) より，n と n^2+2 がともに素数となるのは，$\boldsymbol{n=3}$ の場合に限る． ■

$\boxed{5}$ 3点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とすると，△ABCの重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

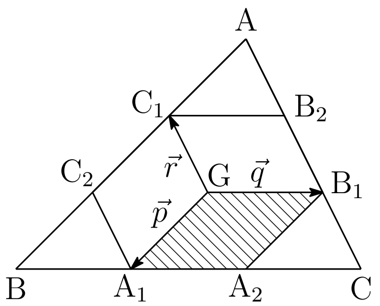
実数 s, t, u を用いて $(0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq u \leqq 1)$，3点 $\mathrm{P}((1-s)\vec{a}+s\vec{b})$，$\mathrm{Q}((1-t)\vec{b}+t\vec{c})$，$\mathrm{R}((1-u)\vec{c}+u\vec{a})$ とすると，△PQRの重心 $\mathrm{G}'(\vec{g'})$ は

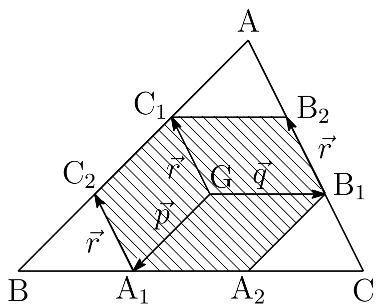
$$\begin{aligned}\vec{g'} =&\frac{1}{3}\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}+(1-u)\vec{c}+u\vec{a}\}\\ =&\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{3}s(\vec{b}-\vec{a})+\frac{1}{3}t(\vec{c}-\vec{b})+\frac{1}{3}u(\vec{a}-\vec{c})\\ =&\vec{g}+\frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\frac{1}{3}u\overrightarrow{\mathrm{CA}}\end{aligned}$$

ここで，$\vec{p}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{q}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{r}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ とおくと

$$\vec{g'}=\vec{g}+s\vec{p}+t\vec{q}+u\vec{r} \qquad (*)$$

辺BC，CA，ABを3等分する点を図のように $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ とすると，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{GA_1}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{GB_1}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{GC_1}}$ となる．$(*)$ において，$u=0$ のとき，$\vec{g'}$ の動く範囲は，左下の図の斜線部分である．これを元に，u を動かすことで，求める重心の動く範囲は，右下の図の斜線部分，すなわち，六角形 $\mathrm{A_1A_2B_1B_2C_1C_2}$ の周およびその内部である．





■

6 $F(\theta) = \int_0^{\theta} x\cos(x+\alpha)\,dx$ より　$F'(\theta) = \theta\cos(\theta+\alpha)$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\theta$ が $\left[\,0,\ \frac{\pi}{2}\,\right]$ の範囲にあるから　$\alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \frac{\pi}{2} + \alpha$

$F'(\theta) = 0$ とすると　$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$F'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$F(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める最大値は

$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} x\cos(x+\alpha)\,dx \\
&= \Big[\,x\sin(x+\alpha) + \cos(x+\alpha)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \alpha - \cos\alpha}
\end{aligned}
$$

■