平成17年度　京都大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理，医，薬，工，農，総合人間(理系)，経済(理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分 (両端を含む) を L とする．曲線 $y = x^2 + ax + b$ が L と共有点を持つような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ．

2 $2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか．

ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である．

3 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は相異なる複素数で，

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

を満たすとする．このとき，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の表す複素平面上の3点を結んで得られる三角形はどのような三角形か．(ただし，複素平面を複素数平面ともいう．)

4 $a^3 - b^3 = 217$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

5 k を正の整数とし，$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ の範囲で定義された2曲線

$$C_1 : y = \cos x, \qquad C_2 : y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える．

(1) C_1 と C_2 は共有点を持つことを示し，その点における C_1 の接線は点 $(0,\ 1)$ を通ることを示せ．

(2) C_1 と C_2 の共有点はただ1つであることを証明せよ．

6 先頭車両から順に1から n までの番号のついた n 両編成の列車がある．ただし $n \geqq 2$ とする．各車両を赤色，青色，黄色のいずれか一色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか．

解答例

$\boxed{1}$ 曲線 $y = x^2 + ax + b$ と線分 $L : y = 2x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の 2 式から y を消去すると

$$x^2 + ax + b = 2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + (a-2)x + b = 0$$

上の第 2 式が $0 \leqq x \leqq 1$ に解をもつ条件を求めればよい．

$f(x) = x^2 + (a-2)x + b$ とすると

$$f(x) = \left(x - \frac{2-a}{2}\right)^2 + b - \frac{1}{4}(a-2)^2$$

$f(x) = 0$ が $0 \leqq x \leqq 1$ に解をもつ条件は，次の (i) または (ii) である．

(i) $f(0)f(1) \leqq 0$

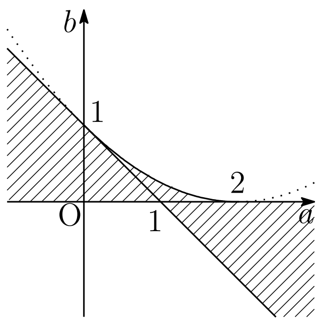
(ii) $f(0) > 0,\ f(1) > 0,\ 0 \leqq \dfrac{2-a}{2} \leqq 1,\ b - \dfrac{1}{4}(a-2)^2 \leqq 0$

すなわち

(i) $b(a+b-1) \leqq 0$

(ii) $b > 0,\ a+b-1 > 0,\ 0 < a < 2,\ b \leqq \dfrac{1}{4}(a-2)^2$

よって，求める点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



■

2 $2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ より　$10\log_{10}2 < (1-3\log_{10}2)n < 20\log_{10}2$

$$\frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2} < n < \frac{20\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}$$

$A = \dfrac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}$ とおくと　　$A < n < 2A$　$\cdots(*)$

$0.301 < \log_{10}2 < 0.3011$ より　$1-3\times0.301 > 1-3\log_{10}2 > 1-3\times0.3011$

$$0.097 > 1-3\log_{10}2 > 0.0967$$

$$\frac{10\times0.301}{0.097} < \frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}3} < \frac{10\times0.3011}{0.0967}$$

$$\frac{3010}{97} < \frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}3} < \frac{30110}{967}$$

$\dfrac{3010}{97} = 31+\dfrac{3}{97}$，$\dfrac{30110}{967} = 31+\dfrac{133}{967}$ より

$$31+\frac{3}{97} < A < 31+\frac{133}{967},\quad 62+\frac{6}{97} < 2A < 62+\frac{266}{967}$$

よって，$(*)$ を満たす自然数は，32 以上 62 以下の **31** 個．■

3 $\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ から γ を消去すると

$$\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)^2=0 \quad ゆえに \quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$$

$\alpha=0$ とすると，$\beta=0$ となり，条件 $\alpha\neq\beta$ に反し不適．

$\alpha\neq0$ であるから　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$

同様に　$\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\gamma}{\alpha}+1=0$

これらは方程式 $x^2+x+1=0$ の解で，

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} = \left(\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

α，β，γ は相異なる複素数であるから

$$\beta=\alpha\left(\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad \gamma=\alpha\left(\cos\frac{2\pi}{3}\mp i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

となる (複号同順)．よって，これら 3 点を結んでできる三角形は正三角形．

補足 $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0$ より三角形の重心は原点．$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha+\beta)=0$ より

$\alpha^3=\beta^3$　ゆえに　$|\alpha|=|\beta|$　同様に　$|\alpha|=|\gamma|$

このとき，三角形の重心と外心が一致するから，正三角形．■

$\boxed{4}$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = 217 = 7{\cdot}31 > 0$ より，$a > b$ であるから

$$(a-b,\ a^2+ab+b^2) = (1,\ 217),\ (7,\ 31),\ (31,\ 7),\ (217,\ 1)$$

(i) $(a-b,\ a^2+ab+b^2) = (1,\ 217)$ のとき，$a = b+1$ より

$$(b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 217 \quad \text{整理すると} \quad b^2 + b - 72 = 0$$

ゆえに　$(b-8)(b+9) = 0$　これを解いて　$b = 8, -9$
したがって　　$(a,\ b) = (9,\ 8),\ (-8, -9)$

(ii) $(a-b,\ a^2+ab+b^2) = (7,\ 31)$ のとき，$a = b+7$ より

$$(b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 31 \quad \text{整理すると} \quad b^2 + 7b + 6 = 0$$

ゆえに　$(b+1)(b+6) = 0$　これを解いて　$b = -1, -6$
したがって　　$(a,\ b) = (6, -1),\ (1, -6)$

(iii) $(a-b,\ a^2+ab+b^2) = (31,\ 7)$ のとき，$a = b+31$ より

$$(b+31)^2 + (b+31)b + b^2 = 7 \quad \text{整理すると} \quad b^2 + 31b + 318 = 0$$

係数について，$D = 31^2 - 4{\cdot}318 < 0$ より，不適．

(iv) $(a-b,\ a^2+ab+b^2) = (217,\ 1)$ のとき，$a = b+217$ より

$$(b+217)^2 + (b+217)b + b^2 = 1 \quad \text{整理すると} \quad 3b^2 + 3{\cdot}217b + 217^2 - 1 = 0$$

係数について，$D = 9{\cdot}217^2 - 4{\cdot}3(217^2-1) = 3(4-217^2) < 0$ より，不適．

(i)〜(iv) より　$\boldsymbol{(a,\ b) = (9,\ 8),\ (-8, -9),\ (6, -1),\ (1, -6)}$　■

$\boxed{5}$ (1) $a = 2k\pi$，$b = (2k+1)\pi$，$f(x) = \cos x - \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ とおくと $(a \leqq x \leqq b)$

$$f(a) = 1 - \frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{2a^2}{1+a^2} > 0$$
$$f(b) = -1 - \frac{1-b^2}{1+b^2} = -\frac{2}{1+b^2} < 0$$

$f(x)$ は連続であるから，区間 $a < x < b$ において，$f(x) = 0$ をみたす x が少なくとも 1 つ存在する．よって

$$C_1 : y = \cos x, \quad C_2 : y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

は，$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ において共有点をもつ．

C_1 と C_2 の共有点の x 座標を t とすると，$f(t)=0$ より

$$\cos t-\frac{1-t^2}{1+t^2}=0 \quad ゆえに \quad \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \cdots ①$$

$g(x)=\cos x$ とすると，$g'(x)=-\sin x$

$0<2k\pi<t<(2k+1)\pi$ であるから，$\sin t>0$，① より

$$\sin t=\sqrt{(1+\cos t)(1-\cos t)}=\sqrt{\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{2t^2}{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$g'(t)=-\frac{2t}{1+t^2} \quad \cdots ②$$

$C_1: y=g(x)$ 上の点 $(t,\ g(t))$ における接線の方程式は，①，② より

$$y-\frac{1-t^2}{1+t^2}=-\frac{2t}{1+t^2}(x-t) \quad ゆえに \quad y=-\frac{2t}{1+t^2}x+1$$

C_1 と C_2 の交点における C_1 の接線は，点 $(0,\ 1)$ を通る．

(2) (1) の結果から，C_1 と C_2 の交点における C_1 の接線は $y=mx+1$ とおける (m は定数)．これと $C_1: y=g(x)$ の接点 $(x,\ y)$ において，

$$y=g(x)=\cos x, \quad m=g'(x)=-\sin x$$

であるから

$$\cos x=(-\sin x)x+1 \quad ゆえに \quad x\sin x+\cos x=1 \qquad (*)$$

$h(x)=x\sin x+\cos x$ とおくと $(2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi)$

$$h'(x)=x\cos x$$

x	$2k\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{1}{2})\pi$	$\cdots$	$(2k+1)\pi$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$(2k+\frac{1}{2})\pi$	$\searrow$	-1

(1) で示したように共有点の x 座標は $x\neq 2k\pi,\ (2k+1)\pi$ であるから，$h(x)=1$，すなわち，$(*)$ を満たす x はただ 1 つ存在する．

よって，C_1 と C_2 の共有点はただ 1 つである． ■

6 n 両目の車両の赤色，赤色以外である場合の数をそれぞれ，a_n, b_n とする．

$n=2$ のとき，1 両目，2 両目の順に赤赤，青赤，黄赤，赤青，赤黄であるから

$$a_2=3,\ b_2=2$$

また，次の漸化式が成立する．

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\quad b_{n+1}=2a_n\quad (n \geqq 2)$$

したがって　$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n+\dfrac{1}{2}b_n\right),\quad a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$

ゆえに　$a_n+\dfrac{1}{2}b_n=\left(a_2+\dfrac{1}{2}b_2\right)\cdot 2^{n-2}=2^n\quad \cdots①$

$a_n-b_n=(a_2-b_2)\cdot(-1)^{n-2}=(-1)^{n-2}\quad \cdots②$

① × 4 − ② より

$$3(a_n+b_n)=2^{n+2}-(-1)^{n-2}\quad \text{ゆえに}\quad a_n+b_n=\frac{1}{3}\left\{2^{n+2}-(-1)^{n-2}\right\}$$

よって，求める場合の数は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\left\{2^{n+2}-(-1)^{n-2}\right\}}$ ■