平成 16 年度　京都大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 $$f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2\theta$$
とする．$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ．

2 $\alpha > 0$ とし，$x > 0$ で定義された関数
$$f(x) = \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right)\frac{\log x}{x}$$
を考える．$y = f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α であらわせ．ただし，e は自然対数の底である．

3 n を 2 以上の自然数とする．x^{2n} を $x^2 - x + \dfrac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする．すなわち，x の多項式 $P_n(x)$ があって
$$x^{2n} = P_n(x)\left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}\right) + a_n x + b_n$$
が成り立っているとする．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

4 行列 A，B を
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
とする．次の $(*)$ が成り立つための実数 α，β についての必要十分条件を求めよ．

$(*)$ どんな 2 次正方行列 Y に対しても，2 次正方行列 X で $AX - XB = Y$ となるものがある．

5 複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ であらわす．α を実数ではない複素数とする．複素平面内の円 C が $1, -1, \alpha$ を通るならば，C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ．

6 N を自然数とする．$N+1$ 個の箱があり，1 から $N+1$ までの番号が付いている．どの箱にも玉が 1 個入っている．番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で，番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である．次の操作 $(*)$ を，おのおのの $k = 1, 2, \cdots, N+1$ に対して，k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う．

$(*)$ k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び，その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する．(ただし，N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は，どれも同様に確からしいとする．)

操作がすべて終了した後，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ．

解答例

1 $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ より，$-1 \leqq \cos 2\theta \leqq 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 4\theta - 4\sin^2\theta \\ &= 2\cos^2 2\theta - 1 - 4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &= 2\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta - 3 \\ &= 2\left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

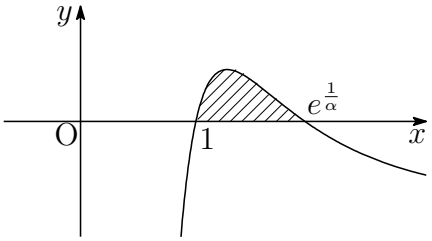
よって，$\cos 2\theta = 1$ のとき，**最大値 1**，$\cos 2\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき，**最小値 $-\dfrac{7}{2}$** ■

2 $f(x) = \left(\dfrac{e}{x^\alpha} - 1\right)\dfrac{\log x}{x}$

$0 < x < 1$ のとき，$\dfrac{e}{x^\alpha} - 1 > 0$, $\dfrac{\log x}{x} < 0$ より　$f(x) < 0$

$x \geqq 1$ のとき，$\dfrac{\log x}{x} \geqq 0$ より，$f(x) \geqq 0$ とすると

$\dfrac{e}{x^\alpha} - 1 \geqq 0$　ゆえに　$x^\alpha \leqq e$　すなわち　$1 \leqq x \leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}} f(x)\,dx = \int_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right)\frac{\log x}{x}\,dx \\ &= -\frac{e}{\alpha}\left[\ \frac{1}{x^\alpha}\left(\log x + \frac{1}{\alpha}\right)\ \right]_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{1}{2}\left[\ (\log x)^2\ \right]_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\alpha^2}\left(e - \frac{5}{2}\right)} \end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\int \frac{e}{x^\alpha}\cdot\frac{\log x}{x}\,dx = -\frac{e}{\alpha}\int (x^{-\alpha})'\log x\,dx = -\frac{e}{\alpha}x^{-\alpha}\log x + \frac{e}{\alpha}\int x^{-\alpha}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$= -\frac{e}{\alpha}x^{-\alpha}\log x - \frac{e}{\alpha^2}x^{-\alpha} + C = -\frac{e}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^\alpha}\left(\log x + \frac{1}{\alpha}\right) + C$$

■

3 $x^{2n} = P_n(x)\left(x^2 - x + \dfrac{n-1}{n^2}\right) + a_n x + b_n$ より

$$x^{2n} = P_n(x)\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - 1 + \frac{1}{n}\right) + a_n x + b_n$$

上式に $x = \dfrac{1}{n},\ 1 - \dfrac{1}{n}$ を代入すると

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2n} = \frac{1}{n}a_n + b_n, \qquad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_n + b_n$$

したがって

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{n}\right)^{2n}$$
$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{2n} - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-2} = e^{-2}$ より，上の 2 式の極限値は

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-2}}, \qquad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} b_n = 0}$$

■

4 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ とおくと

$$AX - XB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (2-\alpha)x & (2-\beta)y \\ x + (1-\alpha)z & y + (1-\beta)u \end{pmatrix}$$

2 つの行列 $\begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 \\ 1 & 1-\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2-\beta & 0 \\ 1 & 1-\beta \end{pmatrix}$ がともに正則であるから

$$(2-\alpha)(1-\alpha) \neq 0, \quad (2-\beta)(1-\beta) \neq 0$$

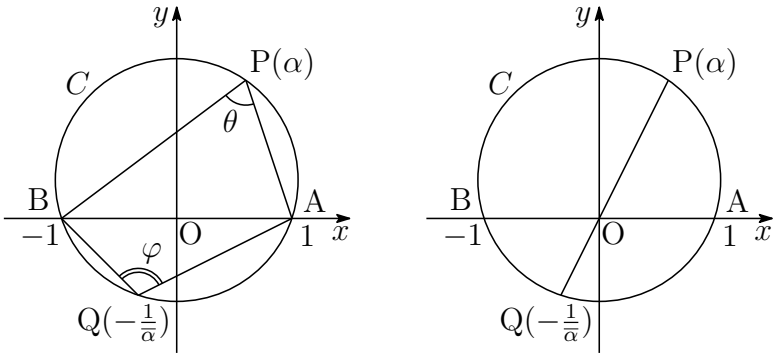
よって　　$\boldsymbol{\alpha \neq 1,\ \alpha \neq 2,\ \beta \neq 1,\ \beta \neq 2}$

■

5 A(1)，B(−1)，P(α)，Q$\left(-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right)$ とし，$\theta=\angle\mathrm{BPA}$，$\varphi=\angle\mathrm{AQB}$ とすると

$$\theta+\varphi=\arg\frac{1-\alpha}{-1-\alpha}+\arg\frac{-1+\frac{1}{\overline{\alpha}}}{1+\frac{1}{\overline{\alpha}}}=\arg\left(\frac{1-\alpha}{-1-\alpha}\cdot\frac{-1+\frac{1}{\overline{\alpha}}}{1+\frac{1}{\overline{\alpha}}}\right)$$
$$=\arg\frac{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})}{-(1+\alpha)(1+\overline{\alpha})}=\arg\left(-\frac{|1-\alpha|^2}{|1+\alpha|^2}\right)=\pi$$

四角形 APBQ の対角の和が π であるから，四角形 APBQ は円 C に内接する．よって，点 $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ は C 上にある．



別解 A(1)，B(−1)，P(α)，Q$\left(-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right)$ とすると，直線 AB は原点 O を通る．

また，$\arg\dfrac{-\frac{1}{\overline{\alpha}}}{\alpha}=\arg\left(-\dfrac{1}{|\alpha|^2}\right)=\pi$ より，直線 PQ が原点 O を通り，直線 AB と直線 PQ の交点が O である．

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1\cdot1=1,\quad \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=|\alpha|\left|-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right|=1$$

$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$ であるから，方べき定理の逆により，四角形 APBQ は円 C に内接する．よって，点 $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ は C 上にある． ■

6 N 回目の操作終了後までに，赤玉が箱 $N+1$ から取り出されることが必要である．また，1 度箱 $N+1$ から取り出された赤玉が N 回目の操作終了後までに箱 $N+1$ に戻ることはない．N 回目の操作終了後までに箱 $N+1$ から赤玉が取り出されない確率は

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$$

ゆえに，N 回目の操作終了後までに箱 $N+1$ から赤玉が取り出される確率は

$$1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$$

$N+1$ 回目の操作で赤玉を箱 $N+1$ に戻す確率が $\dfrac{1}{N}$ であるから，求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{1}{N}\left\{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\right\}}$$

別解 1 度取り出された赤玉が途中移動する過程において，赤玉が入っている箱の番号は大きくなる．その番号を順番に $n_1,\ n_2,\cdots,n_k$ とすると，その過程において赤玉が移動する確率は $\dfrac{1}{N}$，移動しない確率は $1-\dfrac{1}{N}$ である．$N+1$ 回目の操作で赤玉を箱 $N+1$ に戻す確率が $\dfrac{1}{N}$ であるから，求める確率を P とすると

$$\begin{aligned}
P&=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}{}_N\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-k}\\
&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}{}_N\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-k}-\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\\
&=\frac{1}{N}-\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\\
&=\frac{1}{N}\left\{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\right\}
\end{aligned}$$

■