

平成15年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が次の条件 (i), (ii) をみたすとき, $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ.

(i) $a_1 = 1$

(ii) $\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1) \quad (n \geq 2)$

2 $f(x) = x \sin x \ (x \geq 0)$ とする. 点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ における $y = f(x)$ の法線と, $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分, および y 軸とで囲まれる図形を考える. この図形を x 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

3 四面体 OABC は次の2つの条件

(i) $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$

(ii) 4つの面の面積がすべて等しい

をみたしている. このとき, この四面体は正四面体であることを示せ.

4 多項式 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は多項式 $x^2 + x + 1$ で割り切れるか.

5 a, b, c, d を実数とする. 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と2次の単位行列 E に対して, 集合 $L(A)$ を

$$L(A) = \{rE + sA \mid r, s \text{ は実数}\}$$

とする. このとき次の条件 (*) が成立するための, a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ.

(*) $L(A)$ の要素 B は零行列でなければ逆行列をもつ

6 n チームがリーグ戦を行う. すなわち, 各チームは他のすべてのチームとそれぞれ1回ずつ対戦する. 引き分けはないものとし, 勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で, 各回の勝敗は独立に決まるものとする. このとき, $(n-2)$ 勝1敗のチームがちょうど2チームである確率を求めよ. ただし, n は3以上とする.

解答例

1 $\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1)$ より ($n \geq 2$)

$$\log \frac{a_n}{a_{n-1}} = \log \frac{n-1}{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\text{したがって} \quad \prod_{k=2}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{a_1} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$a_1 = 1 \text{ より } a_n = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$$

■

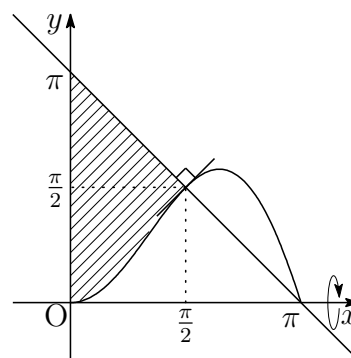
2 $f(x) = x \sin x$ より $f'(x) = \sin x + x \cos x$

$f'(\frac{\pi}{2}) = 1$ より, 点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ における法線は

$$y - \frac{\pi}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + \pi$$

上底 $\frac{\pi}{2}$, 下底 π , 高さ $\frac{\pi}{2}$ の円錐台の体積 V_1 は

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \pi + \pi^2 \right\} = \frac{7}{24} \pi^4$$



曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V_2 は

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \sin 2x - \frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

よって, 求める回転体の体積は

$$V_1 - V_2 = \frac{7}{24} \pi^4 - \pi \left(\frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{13}{48} \pi^4 - \frac{\pi^2}{8}$$

補足 上底 a , 下底 b , 高さ h の円錐台の体積は $\frac{\pi}{3} h(a^2 + ab + b^2)$

■

3 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$ であるから

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \quad (*)$$

$\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積が等しいから

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{c}|^2 |\vec{a}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{a})^2}$$

したがって $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2 = |\vec{c}|^2 |\vec{a}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{a})^2$

(*) より $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 = |\vec{c}|^2 |\vec{a}|^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$

以上から, O を始点するベクトルを用いて, 次の結果が得られた.

$$OA = OB = OC \quad (**)$$

対称性により, A, B をそれぞれ始点とするベクトルを用いて, 次式を得る.

$$AO = AB = AC, \quad BO = BA = BC \quad (***)$$

(**), (***) より, 四面体のすべての辺の長さが等しいから, 正四面体である. ■

4 $x^2 + x + 1 = 0$ の虚数解の 1 つを ω とすると, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ より

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \omega^3 = 1$$

$f(x) = (x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\omega) &= (\omega^{100} + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= \{(\omega^3)^{33} \omega + 1\}^{100} + (-\omega)^{100} + 1 \\ &= (\omega + 1)^{100} + \omega^{100} + 1 \\ &= (-\omega^2)^{100} + \omega^{100} + 1 = \omega^{200} + \omega^{100} + 1 \\ &= (\omega^3)^{66} \omega^2 + (\omega^3)^{33} \omega + 1 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

同様に, $f(\bar{\omega}) = 0$ となる. したがって, $f(x)$ は $x - \omega$, $x - \bar{\omega}$ を因数にもち,

$$(x - \omega)(x - \bar{\omega}) \quad \text{すなわち} \quad x^2 + x + 1$$

で多項式 $f(x)$ は割り切れる. ■

- 5 A が単位行列 E のスカラー倍であるとき, $rE + sA \neq O$ は E のスカラー倍であるから, 条件を満たし, このとき

$$a = d, \quad b = c = 0$$

A が単位行列 E のスカラー倍でないとき, $rE + sA \neq O$ は, $s \neq 0$ のとき, 明らかであるから, $t = \frac{r}{s}$ とし, $A + tE \neq O$ が正則となる必要十分条件を求めればよい. ハミルトン・ケリーの定理 $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$ により

$$\begin{aligned} (A + tE)\{A - (a + d + t)E\} &= A^2 - (a + d)A - t(a + d + t)E \\ &= -(ad - bc)E - t(a + d - t)E \\ &= -\{t^2 - (a + d)t + (ad - bc)\}E \end{aligned}$$

右辺の E の係数がすべての実数 t に対して

$$t^2 - (a + d)t + ad - bc \neq 0$$

であるから, 係数について

$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a - d)^2 + 4bc < 0$$

よって, 求める必要十分条件は

$$a = d, \quad b = c = 0 \quad \text{または} \quad (a - d)^2 + 4bc < 0$$



- 6 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の n チームの中で $(n-2)$ 勝 1 敗となるチームを A_1, A_2 とし、この 2 チームの直接対決では A_1 が勝つものとする。 A_1 は 1 敗するので、 A_1 が負けたチームを A_3 とする。 このとき、 A_2 が一敗したのが A_1 だけであるから、 A_3 は A_1 に勝って、 A_2 に負けている。 この 3 チームの対戦成績が

$$A_1 \bigcirc - \bullet A_2, \quad A_2 \bigcirc - \bullet A_3, \quad A_3 \bigcirc - \bullet A_1,$$

となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

この対戦以外では、 A_1, A_2 は、ともに残り $(n-3)$ 試合に全勝し、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-6}$$

A_3 は、 A_1, A_2 以外の残り $(n-3)$ 試合を全勝しなければよいから、その確率は

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

	A_1	A_2	A_3	A_4	$\dots$	A_n
A_1		$\bigcirc$	$\bullet$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
A_2	$\bullet$		$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
A_3	$\bigcirc$	$\bullet$		*	*	*
A_4	$\bullet$	$\bullet$	*			
$\vdots$	$\bullet$	$\bullet$	*			
A_n	$\bullet$	$\bullet$	*			

n チームで A_1, A_2, A_3 に該当するチームの選び方が ${}_nP_3$ 通りある。

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} & {}_nP_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-6} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} \\ &= n(n-1)(n-2) \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-6}\right\} \end{aligned}$$

■