平成14年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す．この数列が

$$a_1 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = 1, \quad n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geqq 1)$$

を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

2 半径1の円周上に相異なる3点A，B，Cがある．

(1) $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 > 8$ ならば $\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形であることを示せ．

(2) $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 \leqq 9$ が成立することを示せ．また，この等号が成立するのはどのような場合か．

3 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の4次式とする．4次方程式 $f(x) = 0$ の重解も込めた4つの解のうち，2つは整数で残りの2つは虚数であるという．このとき a，b，c の値を求めよ．

4 (1) $x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 極方程式 $r = \theta$ $(\theta \geqq 0)$ で定義される曲線の，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを求めよ．

5 a，b，c を実数とする．$y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ と $y = c$ のグラフが相異なる3つの交点を持つという．このとき $a^2 > b$ が成立することを示し，さらにこれらの交点の x 座標は開区間 $(-a - 2\sqrt{a^2-b},\ -a + 2\sqrt{a^2-b})$ に含まれていることを示せ．

6 $0 < \theta < 90$ とし，a は正の数とする．複素数平面上の点 z_0，z_1，z_2，$\cdots$ をつぎの条件 (i)，(ii) を満たすように定める．

(i) $z_0 = 0$，$z_1 = a$

(ii) $n \geqq 1$ のとき，点 $z_n - z_{n-1}$ を原点のまわりに $\theta°$ 回転すると点 $z_{n+1} - z_n$ に一致する．

このとき点 z_n $(n \geqq 1)$ が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数であることを示せ．

解答例

1 漸化式は $\qquad n(n-2)a_{n+1}=S_n \qquad (n \geqq 1) \quad \cdots ①$

$n \geqq 2$ とすると $\quad (n-1)(n-3)a_n=S_{n-1}$

上の 2 式から，辺々の差をとると，$S_n-S_{n-1}=a_n$ より

$$n(n-2)a_{n+1}-(n-1)(n-3)a_n=a_n$$

整理すると $\qquad n(n-2)a_{n+1}=(n-2)^2a_n$

$n \geqq 3$ のとき $\qquad n(n-1)a_{n+1}=(n-2)(n-1)a_n$

$n \geqq 3$ とき，数列 $\{(n-2)(n-1)a_n\}$ は一定であるから，これを c とすると

$$(n-2)(n-1)a_n=c \quad \text{ゆえに} \quad a_n=c\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right) \qquad (*)$$

したがって $\quad \displaystyle\sum_{k=3}^{n}a_k=c\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)=c\left(1-\frac{1}{n-1}\right) \quad \cdots ②$

① に $n=1$ を代入すると $\quad -a_2=S_1 \quad$ ゆえに $\quad a_1+a_2=0 \quad \cdots ③$

②，③ より $\quad S_n=a_1+a_2+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}a_k=c\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$ より $\quad c=1 \quad$ これを $(*)$ に代入すると

$$a_n=\frac{1}{(n-1)(n-2)} \quad (n \geqq 3)$$

$a_1=1$ を ③ に代入すると $\quad a_2=-1$

よって $\quad \boldsymbol{a_1=1,\ a_2=-1,\ a_n=\dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \quad (n \geqq 3)}$ ■

2 (1) $\triangle$ABCの外心をOとし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とすると

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2 &= |\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2\\ &= 2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\\ &= 6-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}) \qquad (*)\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$のとき　$6-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})>8$

$$-1-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}>0$$

このとき
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 1-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+(-1-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})\\ &> 2+2\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}+\vec{c}|^2\geqq 0\end{aligned}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}>0$　すなわち　$\angle$CABは鋭角

対称性により　$\angle$ABC, $\angle$BCAも鋭角　よって　$\triangle$ABCは鋭角三角形

別解　$\triangle$ABCの外接円の半径が1であるから　$\mathrm{AB}\leqq 2$

$\angle\mathrm{CAB}\geqq 90^\circ$とすると　$\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq\mathrm{AB}^2$

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 2\mathrm{AB}^2\leqq 2\cdot 2^2=8$$

$\angle\mathrm{CAB}\geqq 90^\circ \implies \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 8$　であるから

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8 \implies \angle\mathrm{CAB}<90^\circ$$

対称性により，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8 \implies \angle\mathrm{ABC}<90^\circ,\ \angle\mathrm{BCA}<90^\circ$

よって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$のとき，$\triangle$ABCは鋭角三角形．

(2) $(*)$より
$$\begin{aligned}9-(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2) &= 9-\{6-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\}\\ &= 3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\\ &= |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2\geqq 0\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 9$

上式において，等号が成立するのとき　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

このとき，外心と重心が一致するから，$\triangle$ABCは，正三角形である．

補足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より，$\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$ であるから

$$|\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{a}| \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ より　$2\vec{b}\cdot\vec{c}=-1$　　ゆえに　$|\vec{b}-\vec{c}|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c}=3$
したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{3}$　対称性により　$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=\sqrt{3}$

別解 $\triangle$ABC の外接円の半径が 1 であるから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin B}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2\cdot 1$$

したがって　$\mathrm{BC}=2\sin A,\ \ \mathrm{CA}=2\sin B,\ \ \mathrm{AB}=2\sin C$
$A+B+C=\pi$ より，$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$ であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2 &= 4\sin^2 C+4\sin^2 A+4\sin^2 B \\
&= 4(1-\cos^2 C)+2(1-\cos 2A)+2(1-\cos 2B) \\
&= 8-4\cos^2 C-2(\cos 2A+\cos 2B) \\
&= 8-4\cos^2 C-4\cos(A+B)\cos(A-B) \\
&= 8-4\cos^2 C+4\cos C\cos(A-B) && (**) \\
&= 8+4\cos C\{-\cos C+\cos(A-B)\} \\
&= 8+4\cos C\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\} \\
&= 8+8\cos A\cos B\cos C && (***)
\end{aligned}$$

(1) $(***)$ より　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8 \iff \cos A\cos B\cos C>0$
$\triangle$ABC の内角で，鈍角は高々1個，すなわち，$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ で負であるものは高々1個である．このとき，$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ はすべて正であるから，$\triangle$ABC は鋭角三角形である．

(2) $(**)$ より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=8-\{2\cos C-\cos(A+B)\}^2+\cos^2(A-B)\leqq 9$$

上式において等号が成立するとき，$-\pi<A-B<\pi$ に注意して

$$2\cos C-\cos(A-B)=0 \quad \text{かつ} \quad \cos(A-B)=1$$

上の第 2 式から，$A-B=0$，すなわち，$A=B$．第 1 式に代入して

$$2\cos C-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad C=\frac{\pi}{3} \quad \text{さらに} \quad A=B=\frac{\pi}{3}$$

よって，等号が成立するとき，$\triangle$ABC は正三角形である．■

3 4次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ の整数解を n とすると

$$n^4+an^3+bn^2+cn+1=0 \quad ゆえに \quad n(n^3+an^2+bn+c)=-1$$

$a,\ b,\ c$ は整数であるから，n^3+an^2+bn+c は整数．上式より n は　±1
したがって，$f(x)$ の x^4 の係数および定数項に注意して

$$f(x)=(x\pm1)^2(x^2+px+1) \quad または \quad f(x)=(x^2-1)(x^2+qx-1)$$

(i) $f(x)=(x\pm1)^2(x^2+px+1)$ のとき

$$f(x)=x^4+(p\pm2)x^3+(2\pm2p)x^2+(p\pm2)x+1 \quad (複号同順)$$

$f(x)$ の係数から　$a=p\pm2,\quad b=2\pm2p,\quad c=p\pm2$　(複号同順)
これらは整数であるから，$p\pm2$ が整数より，p は整数．
$x^2+px+1=0$ が虚数解をもつから，係数について

$$p^2-4{\cdot}1{\cdot}1<0 \quad これを満たす整数 p は \quad p=1,\ 0,-1$$

したがって

$$p=1,\ 0,-1,\quad a=p\pm2,\quad b=2\pm2p,\quad c=p\pm2 \quad (複号同順)$$

(ii) $f(x)=(x^2-1)(x^2+qx-1)$ のとき，$x^2+qx-1=0$ の係数について

$$q^2-4{\cdot}1{\cdot}(-1)>0 \quad このとき，虚数解をもたない$$

よって，求める $(a,\ b,\ c)$ は

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 3),\ (-1,\ 0,-1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (-2,\ 2,-2)}$$
$$\boldsymbol{(1,\ 0,\ 1),\ (-3,\ 4,-3)}$$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ より $\quad f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

(2) 求める弧長を L とすると，$r=\theta$ より

$$L=\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta \qquad (*)$$

ここで，$\theta\sqrt{1+\theta^2}$ を微分すると

$$\begin{aligned}(\theta\sqrt{1+\theta^2})'&=\sqrt{1+\theta^2}+\theta\cdot\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\\&=\sqrt{1+\theta^2}+\frac{(1+\theta^2)-1}{\sqrt{1+\theta^2}}\\&=2\sqrt{1+\theta^2}-\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\end{aligned}$$

(1) の結果から $\quad \{\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\}'=\dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\{\theta\sqrt{1+\theta^2}+\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\}'=2\sqrt{1+\theta^2} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}L&=\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\Big[\,\theta\sqrt{1+\theta^2}+\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\,\Big]_0^\pi\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})\right\}}\end{aligned}$$

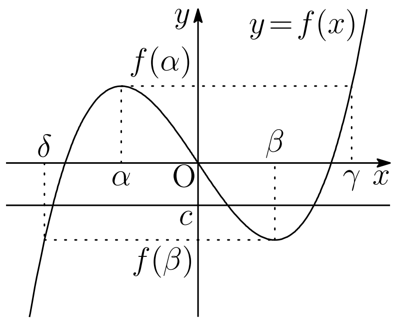
補足 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta$$

したがって $\quad \left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2$

よって $\quad \displaystyle\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta$ ■

5 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ とおく．$y=f(x)$ と $y=c$ が相異なる3つの交点を持つとき，$y=f(x)$ が極大値と極小値をもつことが必要条件であるから



$$f'(x)=3(x^2+2ax+b)=0 \qquad (*)$$

が異なる 2 つの実数解を持ち，係数について

$$a^2-b>0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2>b$$

$f(x)$ が $x=\alpha,\ x=\beta$ でそれぞれ極大値，極小値をとるとき，これらは，2 次方程式 $(*)$ の解であるから $(\alpha<\beta)$

$$\alpha=-a-\sqrt{a^2-b}, \quad \beta=-a+\sqrt{a^2-b}$$

3 次方程式 $f(x)-f(\alpha)=0$，すなわち，$x^3+3ax^2+3bx-f(\alpha)=0$ の解を α(2 重解), γ とすると，解と係数の関係により

$$2\alpha+\gamma=-3a \quad \text{ゆえに} \quad \gamma=-a+2\sqrt{a^2-b}$$

同様に，3 次方程式 $f(x)-f(\beta)=0$，すなわち，$x^3+3ax^2+3bx-f(\beta)=0$ の解を β(2 重解), δ とすると，解と係数の関係により

$$2\beta+\delta=-3a \quad \text{ゆえに} \quad \delta=-a-2\sqrt{a^2-b}$$

$y=f(x)$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつとき，$f(\beta)<c<f(\alpha)$ より，これらの交点の x 座標は，開区間 $(\delta,\ \gamma)$，すなわち，開区間

$$(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b})$$

に含まれる．

解説 n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，$f(x)$ は次のように展開できる[1]．

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+A(x-a)^n$$

x^3 の係数が A である 3 次関数 $f(x)$ について，任意の定数 a に対し

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+A(x-a)^3$$

が成り立つ．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

特に，$f''(a)=0$ を満たす値 a をとると (a は変曲点の x 座標)

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+A(x-a)^3 \tag{$*$}$$

x を $2a-x$ に入れ替えると

$$f(2a-x)=f(a)-f'(a)(x-a)-A(x-a)^3$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$f(x)+f(2a-x)=2f(a) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{f(x)+f(2a-x)}{2}=f(a) \tag{$**$}$$

したがって，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $(x,\ f(x))$，$(2a-x,\ f(2a-x))$ は，変曲点 $(a,\ f(a))$ に関して対称である．

また，$f(x)$ が $x=\alpha,\ \beta$ で極値をとるとき，$f'(x)=3A(x-\alpha)(x-\beta)$ より

$$f''(x)=3A(2x-\alpha-\beta) \tag{$***$}$$

$f(x)$ を $x=\alpha$ を極として展開すると，$f'(\alpha)=0$ により

$$\begin{aligned} f(x)&=f(\alpha)+\frac{1}{2}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+A(x-\alpha)^3 \\ &=f(\alpha)+\frac{3}{2}A(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+A(x-\alpha)^3 \\ &=f(\alpha)+\frac{A}{2}(x-\alpha)^2(2x-3\beta+\alpha) \end{aligned}$$

同様に，$f(x)$ を $x=\beta$ を極として展開すると，$f'(\beta)=0$ により

$$f(x)=f(\beta)+\frac{A}{2}(x-\beta)^2(2x-3\alpha+\beta)$$

上の結果から次が成り立つ．

$$f(\alpha)=f\left(\frac{3\beta-\alpha}{2}\right), \quad f(\beta)=f\left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)$$

$(***)$ より，変曲点の x 座標 a は，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であるから，$x=\alpha$，$a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を $(**)$ に代入することで，極値をとる 2 点が変曲点に関して対称であることが分かる．また，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$，α，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，β，$\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は等差数列をなす． ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ $w = \cos\theta^\circ + i\sin\theta^\circ$ とおくと　$z_{n+1} - z_n = w(z_n - z_{n-1})$　$(n \geqq 1)$

$$z_n - z_{n-1} = (z_1 - z_0)w^{n-1} = aw^{n-1}$$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = a\sum_{k=1}^{n} w^{k-1}$

$$z_n = \frac{a(1-w^n)}{1-w}$$

z_n が $z_0 = 0$ と一致するとき，$w^n = 1$ となる正の整数 n が存在する．
これを満たす n が存在する条件は

$$n\theta = 360k \qquad (*)$$

を満たす整数 k が存在することで，このとき $\theta = \dfrac{360k}{n}$ は有理数である．
逆に，θ が有理数，すなわち，$\theta = \dfrac{q}{p}$ $(p,\ q$ は整数$)$ とすると，$n = 360p$ のとき

$$n\theta = 360q$$

となり，条件 $(*)$ を満たす． ■