平成 13 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理，医，薬，工，農，総合人間 (理系)，経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 xy 平面上の曲線 $C : y = x^3$ 上の点 P における接線を，P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする．C と L が，相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ．

2 未知数 x に関する方程式

$$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + a = 0$$

が，虚軸上の複素数を解に持つような実数 a をすべて求めよ．

3 整数 n に対し $f(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ とおき，$a_n = i^{f(n)}$ と定める．ただし，i は虚数単位を表す．このとき，

$$a_{n+k} = a_n$$

が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ．

4 xyz 空間内の正八面体の頂点 P_1，P_2，$\ldots$，P_6 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする．このとき，k と異なるすべての m に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ．

5 p を 2 以上の整数とする．2 以上の整数 n に対し，次の条件 (イ)，(ロ) をみたす複素数の組 $(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$ の個数を a_n とする．

(イ) $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ に対し，${z_k}^p = 1$ かつ，$z_k \neq 1$.

(ロ) $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$.

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_3 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_n，a_{n+1} の一方または両方を用いて表せ．

(3) a_n を求めよ．

6 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$$

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $C : y = x^3$ より　$y' = 3x^2$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における接線の傾きは　$3t^2$

C 上の点 P における接線の偏角を θ とすると　$\tan\theta = 3t^2$

したがって，直線 L の傾きは

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\theta\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}$$

$3t^2 = 1$ のとき，L は y 軸と平行になり，条件を満たさない．

したがって，直線 L の方程式は　$y = \dfrac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}(x - t) + t^3$

C と L の方程式から，y を消去すると

$$x^3 = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}(x - t) + t^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x - t)\left\{x^2 + tx + t^2 - \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}\right\} = 0$$

$f(x) = x^2 + tx + t^2 - \dfrac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}$ とおくと

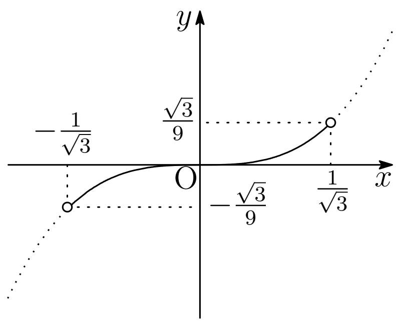
$$f(t) = 3t^2 - \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2} = \frac{9t^4 + 1}{3t^2 - 1} \neq 0$$

$x = t$ は方程式 $f(x) = 0$ の解ではないから，$f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持てばよい．係数について

$$D = t^2 - 4\left(t^2 - \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}\right) = \frac{9t^4 + 9t^2 + 4}{1 - 3t^2}$$

$9t^4 + 9t^2 + 4 > 0$ であるから，$D > 0$ であるとき

$$1 - 3t^2 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$$



■

2 虚軸上の解を $x = ki$ とおくと (k は実数)

$$k^5 i + k^4 + k^3 i - k^2 - (a+1)ki + a = 0$$
$$k^4 - k^2 + a + k\{k^4 + k^2 - (a+1)\}i = 0$$

したがって $\begin{cases} k^4 - k^2 + a = 0 & \cdots ① \\ k\{k^4 + k^2 - (a+1)\} = 0 & \cdots ② \end{cases}$

② から　$k = 0$　または　$k^4 + k^2 - (a+1) = 0$

$k = 0$ を ① に代入して　$a = 0$

$k^4 + k^2 - (a+1) = 0$ と ① から a を消去すると

$$2k^4 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを ① に代入すると

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{a = 0,\ \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}}$ ■

3 $m = n + k$ とおくと

$$\begin{aligned} f(m) - f(n) &= \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(m^2 - m - n^2 + n) \\ &= \frac{1}{2}(m-n)(m+n-1) = \frac{1}{2}(m-n)\{(m-n) - 1 + 2n\} \\ &= \frac{1}{2}k(k - 1 + 2n) = \frac{k(k-1)}{2} + kn \end{aligned}$$

与えられた条件 $a_{n+k} - a_n = i^{f(n+k)} - i^{f(n)} = 0$ を満たすとき，上式から

$$\frac{k(k-1)}{2} + kn \quad \cdots ①$$

が n の値に関係なく常に 4 の倍数であり，① の n を $n+1$ におきかえると

$$\frac{k(k-1)}{2} + k(n+1) \quad \cdots ②$$

② − ① より，k および $\dfrac{k(k-1)}{2}$ がともに 4 の倍数である．

よって，**$\boldsymbol{k}$ は 8 の倍数である．** ■

4 正八面体と頂点 P_k のみを共有する平面 S_k を考える．S_k の法ベクトルの始点を S_k 上にとり，正八面体と S_k に関して反対側にある点を終点とするものを $\vec{v}$ とする．このとき，常に $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v} < 0$ が成立する． ■

5 (1) 条件 (イ)，(ロ) から，正の整数 q_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を

$$w = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}, \quad z_k = w^{q_k}, \quad 1 \leqq q_k < p$$

とおくと　$z_1z_2\cdots z_n = w^{q_1+q_2+\cdots+q_n} = 1$

したがって　$q_1 + q_2 + \cdots + q_n \equiv 0 \pmod{p}$

a_3 は，次を満たす整数 q_1，q_2，q_3 $(1 \leqq q_k < p,\ k = 1, 2, 3)$ の組合せである．

$$q_1 + q_2 + q_3 = p \quad \text{または} \quad q_1 + q_2 + q_3 = 2p$$

(i) $q_1 + q_2 + q_3 = p$ のとき

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + (q_3 - 1) = p - 3$$

上式をみたす非負整数解 $(q_1 - 1,\ q_2 - 1,\ q_3 - 1)$ の個数であるから

$$_3\mathrm{H}_{p-3} = {}_{3+(p-3)-1}\mathrm{C}_{p-3} = {}_{p-1}\mathrm{C}_{p-3} = {}_{p-1}\mathrm{C}_2 \quad \cdots ①$$

(ii) $q_1 + q_2 + q_3 = 2p$ のとき

$$(p - q_1) + (p - q_2) + (p - q_3) = p$$

$1 \leqq p - q_k < p$ $(k = 1, 2, 3)$ より，これを満たす正の整数解 $(q_1,\ q_2,\ q_3)$ の個数は ① と等しいので

$$_{p-1}\mathrm{C}_2$$

よって，(i)，(ii) より　$_{p-1}\mathrm{C}_2 \times 2 = \boldsymbol{(p-1)(p-2)}$

補足 $q_1 + q_2 + q_3 = p$ を満たす正の整数解 $(q_1,\ q_2,\ q_3)$ の個数は，下の p 個の○に間にある $p - 1$ 個の仕切り | から 2 個選ぶ組合せに等しい．

○ | ○ | ○ | ⋯ | ○ | ○

別解 $q_1+q_2=p$ を満たす正の整数解 $(q_1,\ q_2)$ の個数 a_2 は　$a_2=p-1$

したがって，$q_1+q_2\neq p$ の正の整数解 $(q_1,\ q_2)$ の個数は

$$(p-1)^2-a_2=(p-1)^2-(p-1)=(p-1)(p-2)$$

$q_1+q_2\neq p$ の正の整数解 $(q_1,\ q_2)$ に対して，次を満たす q_3 が唯一定まる．

$$q_1+q_2+q_3=p \quad \text{または} \quad q_1+q_2+q_3=2p$$

よって　　$\boldsymbol{a_3=(p-1)(p-2)}$

(2) 正の整数を解とする方程式

$$q_1+q_2+\cdots+q_n+q_{n+1}\equiv 0 \pmod{p}$$

の正の整数解 $(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{n+1})$ の個数が a_{n+1} であるから

$$q_1+q_2+\cdots+q_n+q_{n+1}\not\equiv 0 \pmod{p} \qquad (*)$$

の正の整数解 $(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{n+1})$ の個数は　$(p-1)^{n+1}-a_{n+1}$

$(*)$ の正の整数解 $(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{n+1})$ に対して，次の q_{n+2} が唯一定まる．

$$q_1+q_2+\cdots+q_n+q_{n+1}+q_{n+2}\equiv 0 \pmod{p}$$

よって，求める漸化式は　　$\boldsymbol{a_{n+2}=(p-1)^{n+1}-a_{n+1}}$

別解 (i) $q_{n+1}+q_{n+2}=p$ のとき

$$(q_1+q_2+\cdots+q_n)+(q_{n+1}+q_{n+2})\equiv 0 \pmod{p}$$

の正の整数解の個数は，$q_{n+1}+q_{n+2}=p$ の正の整数解の個数が $p-1$ であることと，$q_1+q_2+\cdots+q_n\equiv 0 \pmod{p}$ の正の整数解の個数が a_n であることから

$$(p-1)a_n$$

(ii) $q_{n+1}+q_{n+2}\neq p$ のとき，$q_{n+1}+q_{n+2}$ を p で割った余りを Q_{n+1} とすると

$$q_1+q_2+\cdots+q_n+Q_{n+1}\equiv 0 \pmod{p}$$

をみたす正の整数解の個数は，a_{n+1} であり，Q_{n+1} に対する q_{n+1} の個数は $q_{n+1}\equiv Q_{n+1} \pmod{p}$ を除く $n-2$ 個であるから ($q_{n+1}\equiv Q_{n+1}$ のとき，$q_{n+2}\equiv 0 \pmod{p}$ となり不適)

$$(p-2)a_{n+1}$$

よって　　$\boldsymbol{a_{n+2}=(p-2)a_{n+1}+(p-1)a_n}$

補足 $a_2=p-1,\ a_3=(p-1)(p-2),\ a_{n+2}=(p-2)a_{n+1}+(p-1)a_n$ より

$$a_{n+2}+a_{n+1}=(p-1)(a_{n+1}+a_n)$$

したがって　$a_{n+2}+a_{n+1}=(p-1)^{n-1}(a_3+a_2)$

$$a_{n+2}+a_{n+1}=(p-1)^{n-1}\{(p-2)(p-1)+(p-1)\}$$

これから　$a_{n+2}=(p-1)^{n+1}-a_{n+1}$

(3) $a_2=p-1,\ a_{n+2}=(p-1)^{n+1}-a_{n+1}$ より

$$a_{n+2}-\frac{1}{p}(p-1)^{n+2}=-\left\{a_{n+1}-\frac{1}{p}(p-1)^{n+1}\right\}$$

したがって　$a_n-\dfrac{1}{p}(p-1)^n=(-1)^{n-2}\left\{a_2-\dfrac{1}{p}(p-1)^2\right\}$

$$a_n-\frac{1}{p}(p-1)^n=(-1)^{n-2}\left\{p-1-\frac{1}{p}(p-1)^2\right\}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{p-1}{p}\{(p-1)^{n-1}+(-1)^n\}}$

補足 A を定数とし

$$A(p-1)^{n+2}=(p-1)^{n+1}-A(p-1)^{n+1}$$

とおくと

$$A(p-1)=1-A \quad ゆえに \quad A=\frac{1}{p}$$

これから

$$a_{n+2}=(p-1)^{n+1}-a_{n+1}$$

$$\frac{1}{p}(p-1)^{n+2}=(p-1)^{n+1}-\frac{1}{p}(p-1)^{n+1}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$a_{n+2}-\frac{1}{p}(p-1)^{n+2}=-\left\{a_{n+1}-\frac{1}{p}(p-1)^{n+1}\right\}$$

別解 $a_2 = p-1,\ a_3 = (p-1)(p-2),\ a_{n+2} = (p-2)a_{n+1} + (p-1)a_n$ より

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_{n+1} &= (p-1)(a_{n+1} + a_n), \\ a_{n+2} - (p-1)a_{n+1} &= -\{a_{n+1} - (p-1)a_n\} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_n &= (p-1)^{n-2}(a_3 + a_2) \\ &= (p-1)^{n-2}\{(p-1)(p-2) + (p-1)\} \\ &= (p-1)^n, \\ a_{n+1} - (p-1)a_n &= (-1)^{n-2}\{a_3 - (p-1)a_2\} \\ &= (-1)^{n-2}\{(p-1)(p-2) - (p-1)(p-1)\} \\ &= -(-1)^n(p-1) \end{aligned}$$

上の第 1 式から第 2 式の差をとると

$$pa_n = (p-1)\{(p-1)^{n-1} + (-1)^n\}$$

よって $$\boldsymbol{a_n = \frac{p-1}{p}\{(p-1)^{n-1} + (-1)^n\}}$$ ■

$\boxed{6}$ $r = e^{-\frac{\pi}{n}}$, $a_k = \dfrac{k\pi}{n}$, $I_k = \displaystyle\int_{a_{k-1}}^{a_k} e^{-x}|\sin nx|\,dx$ とおくと $(k = 1, 2, \cdots, n^2)$

$$I_k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} e^{-x}|\sin nx|\,dx = \left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} e^{-x}\sin nx\,dx\right|$$

$a_{k-1} \leqq x \leqq a_k$ において，$re^{-a_{k-1}} = e^{-a_k} \leqq e^{-x} \leqq e^{-a_{k-1}}$ であるから

$$re^{-a_{k-1}}\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin nx\,dx\right| \leqq I_k \leqq e^{-a_{k-1}}\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin nx\,dx\right|$$

$$\begin{aligned}\int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin nx\,dx &= \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{a_{k-1}}^{a_k} \\ &= -\frac{1}{n}\cos k\pi + \frac{1}{n}\cos(k-1)\pi \\ &= -\frac{(-1)^k}{n} + \frac{(-1)^{k-1}}{n} = -\frac{2(-1)^k}{n}\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{2r}{n}e^{-a_{k-1}} \leqq I_k \leqq \dfrac{2}{n}e^{-a_{k-1}}$

$J = \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$ とおくと，$J = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} I_k$ であるから

$$\frac{2r}{n}\sum_{k=1}^{n^2} e^{-a_{k-1}} \leqq J \leqq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n^2} e^{-a_{k-1}}$$

このとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} e^{-a_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k-1}{n}} = \sum_{k=1}^{n^2} r^{k-1} = \frac{1-r^{n^2}}{1-r} = \frac{1-e^{-n\pi}}{1-r}$

したがって　$\dfrac{2r(1-e^{-n\pi})}{n(1-r)} \leqq \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx \leqq \dfrac{2(1-e^{-n\pi})}{n(1-r)}$　$\cdots(*)$

$t = -\dfrac{\pi}{n}$，$f(t) = e^t$ とおくと　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0) = 1$

$n \to \infty$ のとき，$t \to 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r-1}{-\frac{\pi}{n}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} n(1-r) = \pi$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r = 1$ に注意して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2r(1-e^{-n\pi})}{n(1-r)} = \frac{2}{\pi}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2(1-e^{-n\pi})}{n(1-r)} = \frac{2}{\pi}$

はさみうちの原理を $(*)$ に適用して　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx = \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$

別解 $\displaystyle\int e^{-x}\sin nx\,dx = -\frac{1}{n^2+1}e^{-x}(\sin nx + n\cos nx) + C$ より (C は積分定数)

$$
\begin{aligned}
I_k &= \left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} e^{-x}\sin x\,dx\right| = \frac{1}{n^2+1}\left|\Big[\ e^{-x}(\sin nx + n\cos nx)\ \Big]_{a_{k-1}}^{a_k}\right| \\
&= \frac{1}{n^2+1}\left|e^{-a_k}n(-1)^k - e^{-a_{k-1}}n(-1)^{k-1}\right| \\
&= \frac{n}{n^2+1}(e^{-\frac{k}{n}\pi} + e^{-\frac{k-1}{n}\pi}) = \frac{n}{n^2+1}(e^{-\frac{\pi}{n}} + 1)e^{-\frac{k-1}{n}\pi} \\
&= \frac{n(r+1)}{n^2+1}r^{k-1}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{k=1}^{n^2} I_k = \frac{n(r+1)}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n^2} r^{k-1} \\
&= \frac{n(r+1)}{n^2+1} \times \frac{(1-r^{n^2})}{1-r} = \frac{n^2(r+1)}{n^2+1} \times \frac{1-e^{-n\pi}}{n(1-r)}
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r = 1,\ \lim_{n\to\infty} n(1-r) = \pi$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J = \frac{2}{\pi}$ ■