令和７年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ．

(1) x，y，z は実数で

$$2025^x = 3^y = 5^z$$

を満たすとする．このとき $2xy + 4xz - yz = 0$ であることを示せ．

(2) $n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ．

2 実数 a，b についての次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

が成り立つ．

この条件 $(*)$ を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ．

3 n は正の整数とする．1 枚の硬貨を投げ，表が出たら 1，裏が出たら 2 と記録する．この試行を n 回繰り返し，記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る．ただし，数の表し方は十進法とする．このとき，X が 6 で割り切れる確率を求めよ．

4 座標平面において，曲線 $C_1 : y = x^2 - 2|x|$，曲線 $C_2 : y = x^2 - 5x + \dfrac{7}{4}$，直線 $l_1 : x = \dfrac{3}{2}$ を考える．

(1) 点 $(0,\ 0)$ と異なる点で C_1 と接し，さらに C_2 とも接するような直線 l_2 がただ一つ存在することを示せ．

(2) C_1 と l_2 の共有点を P とし，その x 座標を α とする．また，l_1 と l_2 の共有点を Q とし，C_1 と l_1 の共有点を R とする．曲線 C_1 の $\alpha \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の部分，線分 PQ，および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ 座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．$s,\ t,\ u$ は 0 でない実数とする．直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる．$s,\ t,\ u$ が $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L，M，N の定める平面 LMN は，$s,\ t,\ u$ の値に無関係な一定の点を通ることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $2025^x = 3^y = 5^z$ より　$3^{4x}5^{2x} = 3^y = 5^z$

$3^{4x}5^{2x} = 3^y$ の両辺を z 乗すると

$$(3^{4x}5^{2x})^z = (3^y)^z \quad ゆえに \quad 3^{4xz}(5^z)^{2x} = 3^{yz}$$

上の第 2 式に $5^z = 3^y$ を代入すると

$$3^{4xz}(3^y)^{2x} = 3^{yz} \quad ゆえに \quad 3^{4xz+2xy} = 3^{yz}$$

したがって　$4xz + 2xy = yz$　よって　$2xy + 4xz - yz = 0$

別解 $2025^x = 3^y = 5^z$ より　$3^{4x}5^{2x} = 3^y = 5^z$

上の第 2 式の辺々を底を 3 とする対数をとると

$$4x + 2x\log_3 5 = y = z\log_3 5$$

$4x + 2x\log_3 5 = y$ の両辺に z をかけると

$$4xz + 2xz\log_3 5 = yz$$

上式に $z\log_3 5 = y$ を代入すると

$$4xz + 2xy = yz \quad ゆえに \quad 2xy + 4xz - yz = 0$$

(2) $\dfrac{n^4 + 6n^2 + 23}{n^2 + n + 3} = n^2 - n + 4 + \dfrac{-n + 11}{n^2 + n + 3}$ より

$$K = \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3}$$

とおくと，K が整数となる自然数 n を求めればよい．

(i) $K = 0$ のとき　$n = 11$

(ii) $K \geqq 1$ のとき　$\dfrac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \geqq 1$

$$-n + 11 \geqq n^2 + n + 3 \quad ゆえに \quad (n + 4)(n - 2) \leqq 0$$

n は自然数であるから　$n = 1,\ 2$

$$n = 1 \text{ のとき } K = 2, \quad n = 2 \text{ のとき } K = 1$$

したがって，これらは条件を満たす．

(iii) $K \leqq -1$ のとき　$\dfrac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \leqq -1$

$$-n + 11 \leqq -n^2 - n - 3 \quad ゆえに \quad n^2 + 14 \leqq 0$$

これを満たす自然数 n は存在しない．

(i)〜(iii) より　　$\boldsymbol{n = 1,\ 2,\ 11}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数係数の 2 次式 $f(x)$ を $f(x)=px^2+qx+r$ とおくと $(p\neq 0)$

$$\begin{aligned}f(f(x))+c&=pf(x)^2+qf(x)+r+c\\&=p(px^2+qx+r)^2+q(px^2+qx+r)+r+c\\&=p^3x^4+2p^2qx^3+p(q^2+2pr+q)x^2\\&\qquad+q(2pr+q)x+pr^2+qr+r+c\end{aligned}$$

これが $\dfrac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2$ に等しいから，x^4 の係数を比較すると

$$\frac{1}{8}=p^3 \quad \text{すなわち} \quad p=\frac{1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}f(f(x))+c=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}qx^3+\frac{1}{2}(q^2+q+r)x^2\\+q(q+r)x+\frac{1}{2}r^2+qr+r+c\end{aligned}$$

上式と $\dfrac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2$ が等しい．定数項 $\dfrac{1}{2}r^2+qr+r+c$ は 0 となるように c をとれるから

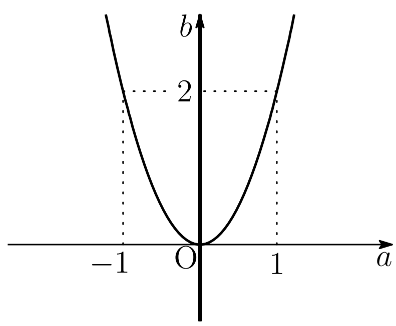
$$a=\frac{1}{2}q,\quad b=\frac{1}{2}(q^2+q+r),\quad 0=q(q+r) \qquad (*)$$

を同時に満たす $(a,\ b)$ を求めればよい．$(*)$ の第 3 式から，次の場合分けを行う．

(i) $q=0$ のとき　$a=0$，$b=\dfrac{1}{2}r$ (r は任意の実数)

(ii) $q+r=0$ のとき　$a=\dfrac{1}{2}q$，$b=\dfrac{1}{2}q^2$　ゆえに　$b=2a^2$

(i)，(ii) より，点 $(a,\ b)$ の全体の集合は，次のようになる．



別解 $f(x)$ は実数係数の 2 次関数であるから，$f(f(x))$ は微分可能である．

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$
$$\frac{1}{8}(x+h)^4 + a(x+h)^3 + b(x+h)^2 = f(f(x+h)) + c$$

上の 2 式から

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} + a\cdot\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} + b\cdot\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \frac{f(f(x+h)) - f(f(x))}{f(x+h) - f(x)}\cdot\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h \longrightarrow 0$ とすると，導関数の定義により

$$\frac{1}{2}x^3 + 3ax^2 + 2bx = f'(f(x))f'(x)$$

$f(x) = px^2 + qx + r$ とおくと $(p \neq 0)$，$f'(x) = 2px + q$ より

$$\frac{1}{2}x^3 + 3ax^2 + 2bx = \{2pf(x) + q\}(2px + q)$$
$$= \{2p(px^2 + qx + r) + q\}(2px + q)$$

ここで，x^3 の係数を比較すると

$$\frac{1}{2} = 4p^3 \quad ゆえに \quad p = \frac{1}{2}$$

したがって

$$\frac{1}{2}x^3 + 3ax^2 + 2bx = \left(\frac{1}{2}x^2 + qx + q + r\right)(x + q)$$
$$= \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}qx^2 + (q^2 + q + r)x + q(q + r)$$

上式の同じ次数の項の係数を比較して

$$3a = \frac{3}{2}q, \quad 2b = q^2 + q + r, \quad 0 = q(q + r)$$

上の第 3 式から，次の場合分けを行う．

(i) $q = 0$ のとき　$a = 0$，$b = \frac{1}{2}r$ (r は任意の実数)

(ii) $q + r = 0$ のとき　$a = \frac{1}{2}q$，$b = \frac{1}{2}q^2$　ゆえに　$b = 2a^2$

以下同様 ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ 一般に，n 桁の数 X について，$10 \equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot 10^k \equiv 0 \iff X = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \equiv 0 \pmod 3$$

n 桁の数 X が，法 3 について

$$X \equiv 0, \quad X \equiv 1, \quad X \equiv 2 \qquad \pmod 3$$

となる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とすると，$a_1 = 0$，$b_1 = c_1 = \frac{1}{2}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n), \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

$a_n + b_n + c_n = 1$ であるから，$b_n + c_n = 1 - a_n$ より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

$\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

また，$X \equiv 0 \pmod 2$ である確率が $\frac{1}{2}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}a_n = \boldsymbol{\frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

■

4 (1) $C_1 : y = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 + 2x & (x \leqq 0) \\ x^2 - 2x & (x \geqq 0) \end{cases}$ より　$y' = \begin{cases} 2x + 2 & (x < 0) \\ 2x - 2 & (x > 0) \end{cases}$

C_1 と l_2 の接点の x 座標を α とし，α の符号による場合分けを行う．

(i) $\alpha < 0$ のとき，l_2 は点 $(\alpha,\ \alpha^2 + 2\alpha)$ を通り，傾き $2\alpha + 2$ の直線より

$$y - (\alpha^2 + 2\alpha) = (2\alpha + 2)(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad y = (2\alpha + 2)x - \alpha^2$$

これと C_2 の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 - (2\alpha + 7)x + \alpha^2 + \frac{7}{4} = 0$$

このとき，上の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$(2\alpha + 7)^2 - 4\left(\alpha^2 + \frac{7}{4}\right) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \alpha = -\frac{3}{2}$$

したがって，l_2 の方程式は　$y = -x - \dfrac{9}{4}$

(ii) $\alpha > 0$ のとき，l_2 は点 $(\alpha,\ \alpha^2 - 2\alpha)$ を通り，傾き $2\alpha - 2$ の直線より

$$y - (\alpha^2 - 2\alpha) = (2\alpha - 2)(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad y = (2\alpha - 2)x - \alpha^2$$

これと C_2 の方程式から y を消去して整理すると

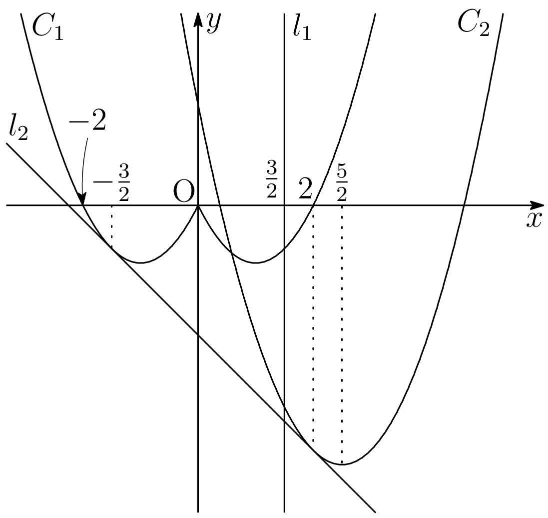
$$x^2 - (2\alpha + 3)x + \alpha^2 + \frac{7}{4} = 0$$

このとき，上の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$(2\alpha + 3)^2 - 4\left(\alpha^2 + \frac{7}{4}\right) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \alpha = -\frac{1}{6}$$

これは，$\alpha > 0$ に反するから不適．

(i)，(ii) より，条件を満たす直線 l_2 は，ただ一つ存在する．



(2) C_1 と l_2 の共有点 P は (1)(i) より　$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

$l_1 : x = \frac{3}{2}$ と $l_2 : y = -x - \frac{9}{4}$ の交点は　$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

2 点 P，Q から x 軸にそれぞれ垂線 PP′, QQ′ を引く．

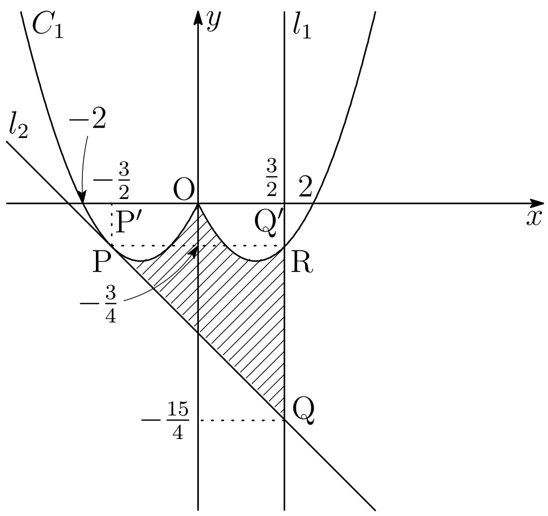
台形 PQQ′P′ の面積を T とすると

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{15}{4}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$$

求める面積 S は，下の図の斜線部分である．C_1 は y 軸に関して対称であることに注意して

$$S = T - 2\int_0^{\frac{3}{2}} \{-(x^2 - 2x)\}\,dx$$

$$= \frac{27}{4} + 2\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^{\frac{3}{2}} = \mathbf{\frac{9}{2}}$$



■

5 $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ より，$\frac{1}{4s} + \frac{1}{2t} + \frac{3}{4u} = 1$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{4s}\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{3}{4u}\overrightarrow{\mathrm{ON}} \qquad (*)$$

とすると，点 X は平面 LMN 上の点である．

$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $(*)$ の右辺に代入し，これを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とすると，点 P は，s, t, u の値と無関係な平面 LMN の定点である．■