令和６年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

問題 [1] [2] [3] [4] [5]

1 四面体 OABC が次を満たすとする．

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1, \quad \angle\mathrm{COA} = \angle\mathrm{COB} = \angle\mathrm{ACB}, \quad \angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$$

このとき，四面体 OABC の体積を求めよ．

2 n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_3 を求めよ．

(2) p_4 を求めよ．

3 a は正の定数とする．次の関数の最大値を求めよ．

$$f(x) = \left| x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2 \right) \right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

4 ある自然数を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて同じになった．このような自然数で最大のものを求めよ．ただし，必要なら次を用いてもよい．

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011, \quad 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

5 関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフの $x > 1$ の部分を C とする．このとき，下の条件を満たすような正の実数 a，b について，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域の面積を求めよ．

「C と直線 $y = ax + b$ は二つの異なる共有点を持つ．」

解答例

$\boxed{1}$ OA $=$ OB $=$ OC $= 1$, $\angle$AOB $= 90^\circ$ であるから，O を座標空間の原点とし，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(s,\ t,\ u)$ とおく ($u > 0,\ s^2 + t^2 + u^2 = 1 \cdots$①).

$\cos\angle\mathrm{COA} = \cos\angle\mathrm{COB} = \cos\angle\mathrm{ACB}$ であるから

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|} \tag{A}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (s,\ t,\ u)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (1-s, -t, -u)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (-s,\ 1-t, -u)$ を代入すると

$$s = t = \frac{-s(1-s) - t(1-t) + u^2}{\sqrt{(1-s)^2 + t^2 + u^2}\sqrt{s^2 + (1-t)^2 + u^2}}$$

$s = t$ を ① および上式に代入すると

$$2t^2 + u^2 = 1, \quad t = \frac{2t^2 + u^2 - 2t}{2t^2 + u^2 - 2t + 1} \tag{$*$}$$

$(*)$ の 2 式から u を消去すると

$$t = \frac{1-2t}{2-2t} \quad \text{整理すると} \quad 2t^2 - 4t + 1 = 0$$

$(*)$ の第 1 式から，$|t| \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に注意して

$$t = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad u^2 = 1 - 2t^2 = 2\sqrt{2} - 2$$

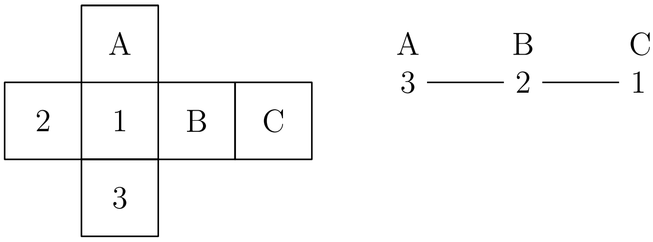
$u > 0$ より　　$u = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$

よって，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot u = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{6}}$$

■

2 (1) 次の立方体の展開図において，1，2，3 の面を異なる色で塗り，残りの A，B，C の面を順番に塗るとき，A，B，C はそれぞれ 3，2，1 と同じ色で塗ることになる．

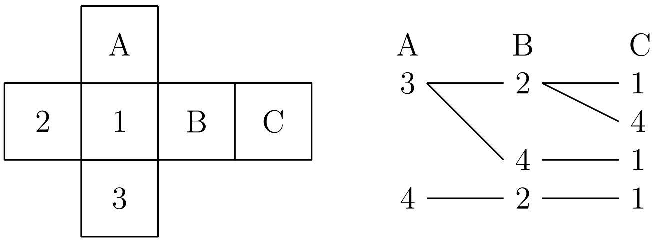


3 色を 1〜3 に対応させる方法が 3! 通りあるから，求める確率は

$$\frac{3!}{3^6} = \mathbf{\frac{2}{243}}$$

(2) 次の立方体の展開図において，1，2，3 の面を異なる色で塗り，残りの A，B，C の面を順番に塗るとき，次の規則に従う．

- A は 1，2 以外の色で塗る．
- B は 1，3，A 以外の色で塗る．
- C は 2，3，A，B 以外の色で塗る．



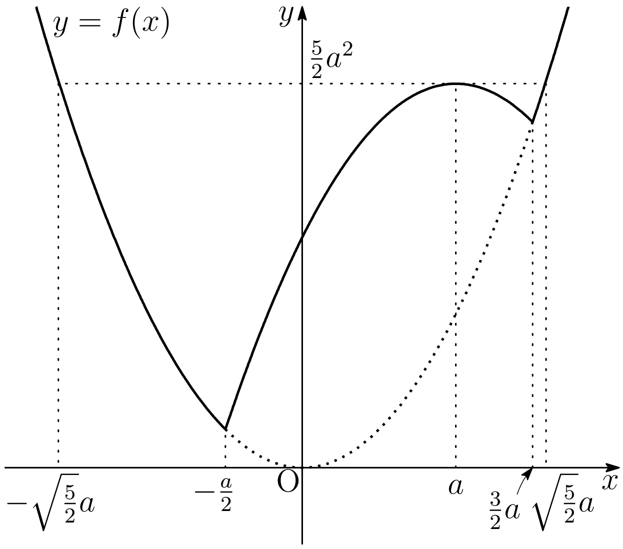
1〜4 の色で展開図の面を塗る方法は上の樹形図で示した 4 通あり，4 色を 1〜4 に対応させる方法が 4! 通りあるから，求める確率は

$$\frac{4 \cdot 4!}{4^6} = \mathbf{\frac{3}{128}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x^2-\left(ax+\dfrac{3}{4}a^2\right)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}a\right)$ より

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \left(x\leqq -\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3}{2}a\leqq x\right) \\ -x^2+2ax+\dfrac{3}{2}a^2 & \left(-\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



(i) $0\leqq t\leqq \dfrac{a}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(t)-f(-t)&=\left(-t^2+2at+\frac{3}{2}a^2\right)-\left\{-(-t)^2+2a(-t)+\frac{3}{2}a^2\right\} \\ &=4at\geqq 0 \end{aligned}$$

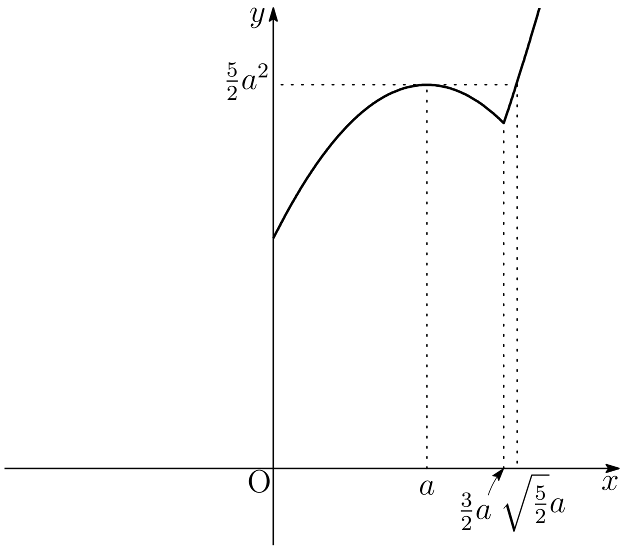
(ii) $\dfrac{a}{2}\leqq t\leqq \dfrac{3}{2}a$ のとき

$$\begin{aligned} f(t)-f(-t)&=\left(-t^2+2at+\frac{3}{2}a^2\right)-(-t)^2 \\ &=-2t^2+2at+\frac{3}{2}a^2 \\ &=-2\left(t+\frac{a}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}a\right)\geqq 0 \end{aligned}$$

(iii) $\dfrac{3}{2}a\leqq t$ のとき

$$f(t)-f(-t)=t^2-(-t)^2=0$$

(i)〜(iii) より，$f(x)$ の最大値は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で求めるとよい．



したがって

$\boldsymbol{1 < a}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{f(1) = \dfrac{3}{2}a^2 + 2a - 1}$

$a \leqq 1 < \sqrt{\dfrac{5}{2}}a$，すなわち，$\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2}{5}} < a} \leqq \boldsymbol{1}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{f(a) = \dfrac{5}{2}a^2}$

$\sqrt{\dfrac{5}{2}}a \leqq 1$，すなわち，$\boldsymbol{0 < a} \leqq \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2}{5}}}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{f(1) = 1}$

■

$\boxed{4}$ 八進法および十進法でそれぞれ表記された数の桁数が同じである最大の自然数を求めればよい．八進法で表記された n 桁の最大数

$$\overbrace{7\cdots7}^{n\,\text{桁}}{}_{(8)} = 8^n - 1 \qquad (*)$$

と 10 進法で表記された n 桁の最小数 10^{n-1} について，次式を満たす．

$$8^n - 1 \geqq 10^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad 8^n > 10^{n-1} \qquad \text{(A)}$$

上の第 2 式から　　$\log_{10} 8^n > n - 1$

$$(1 - 3\log_{10} 2)n < 1 \quad \text{ゆえに} \quad n < \frac{1}{1 - 3\log_{10} 2} \qquad \text{(B)}$$

$0.3010 < \log_{20} 2 < 0.3011$ より

$$\frac{1}{11} < 0.0967 < 1 - 3\log_{10} 2 < 0.097 < \frac{1}{10}$$

$$10 < \frac{1}{1 - 3\log_{10} 2} < 11$$

したがって，(B) を満たす最大の整数 n は　　$n = 10$

$n = 10$ を (A) の第 1 式に代入すると

$$8^{10} - 1 \geqq 10^9$$

$(*)$ により，求める最大の自然数は　　$\mathbf{8^{10} - 1}$　■

$\boxed{\mathbf{5}}$ $y=x^2-4x+5$ と $y=ax+b$ から y を消去すると

$$x^2-4x+5=ax+b \quad ゆえに \quad x^2-(a+4)x-b+5=0$$

この 2 次方程式が $x>1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつための a, b の条件を求めればよい．$f(x)=x^2-(a+4)x-b+5$ とおくと

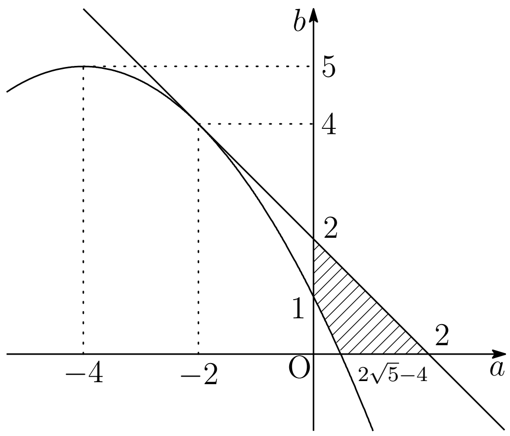
$$f(x)=\left(x-\frac{a+4}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(a+4)^2-b+5$$

a，b が正であることと条件を満たすとき

$$a>0, \quad b>0, \quad f(1)=-a-b+2>0, \quad -\frac{1}{4}(a+4)^2-b+5<0$$

すなわち $\qquad a>0, \quad b>0, \quad b<-a+2, \quad b>-\frac{1}{4}(a+4)^2+5$

これらの不等式の満たす領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



よって，求める斜線部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\int_0^{2\sqrt{5}-4}\left\{-\frac{1}{4}(a+4)^2+5\right\}da \\
&= 2+\left[\frac{1}{12}(a+4)^3-5a\right]_0^{2\sqrt{5}-4} \\
&= \boldsymbol{\frac{50-20\sqrt{5}}{3}}
\end{aligned}$$

■