令和５年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ．

(1) n を自然数とする．1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の積が 5 で割り切れる確率を求めよ．

(2) 次の式の分母を有理化し，分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ．

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$$

2 空間内の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．点 D，P，Q を次のように定める．点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を 1 : 2 に内分し，点 Q は線分 OB の中点である．さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める．このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR : RD を求めよ．

3 (1) $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ．

(2) 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さが 1.15 より大きいか否かを理由を付けて判定せよ．

4 数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしている．

$$a_1=3,\quad a_n=\frac{S_n}{n}+(n-1)\cdot 2^n \qquad (n=2,3,4,\cdots)$$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ である．このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

5 整式 $f(x)$ が恒等式

$$f(x)+\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)\,dy=2x^2+x+\frac{5}{3}$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．

解答例

1 (1) 出た目の積が5で割り切れない確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^n$

求める確率は，この余事象の確率であるから $\mathbf{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}$

(2) $x=\sqrt[3]{3}$ おくと $2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5=2x^2+x+5$

$f(x)=2x^2+x+5$ とすると，$x^3=3$ であるから

$$\begin{aligned} x^2f(x)&=5x^2+6x+3 \quad &\cdots①\\ xf(x)&=x^2+5x+6 \quad &\cdots②\\ f(x)&=2x^2+x+5 \quad &\cdots③ \end{aligned}$$

$① - 5\times ②$ および $② \times 2 - ③$ より

$$\begin{aligned} (x^2-5x)f(x)&=-19x-27 \quad &\cdots④\\ (2x-1)f(x)&=9x+7 \quad &\cdots⑤ \end{aligned}$$

$④ \times 9 + ⑤ \times 19$ より

$$(9x^2-7x-19)f(x)=-110 \quad ゆえに \quad \frac{55}{f(x)}=\frac{1}{2}(-9x^2+7x+19)$$

よって $$\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{x}+5}=\mathbf{\frac{1}{2}(-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19)}$$

発展 ①〜③ より $f(x)\begin{pmatrix} x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5&6&3\\ 1&5&6\\ 2&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}$

したがって $f(x)\begin{pmatrix} 19&-27&21\\ 7&19&-27\\ -9&7&19\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}=110\begin{pmatrix} x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}$

すなわち $f(x)(-9x^2+7x+19)=110$ ■

$\boxed{2}$ R は直線 OD 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

直線 QR 上の点の位置ベクトルは，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-t)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + tk(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\ &= 3tk\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left\{\frac{1}{2}(1-t) + 2tk\right\}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3tk\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

これが直線 PC 上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 1 次独立および $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から

$$3tk + 3tk = 1, \quad \frac{1}{2}(1-t) + 2tk = 0$$

これを解いて　$t = \frac{5}{3}$，$k = \frac{1}{10}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

よって　**OR : RD = 1 : 9**

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{10}\end{aligned}$$

$(*)$ $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると，R は平面 PQC 上の点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{10}(\overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}}{2}$$

確かに，直線 QR は線分 PC の中点を通る．$(*)$ より　**OR : RD = 1 : 9**　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 加法定理から

$$\cos 2\theta = \mathbf{2\cos^2\theta - 1}$$
$$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$$
$$\cos\theta = \cos(2\theta-\theta) = \cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta$$

上の第 2 式と第 3 式の辺々を加えると

$$\cos 3\theta + \cos\theta = 2\cos 2\theta\cos\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)\cos\theta$$

よって　$\cos 3\theta = \mathbf{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$

(2) $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$ とすると，$5\theta = 2\pi$ より　$3\theta = 2\pi - 2\theta$ であるから

$$\cos 3\theta = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$$

これに (1) の結果を代入すると　$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$(\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 0$$

$0 < \cos\theta < 1$ に注意して　$\cos\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

正五角形の一辺の長さを a とすると，余弦定理により

$$a^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos\theta = 2 - 2\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} a^2 - 1.15^2 &= \frac{5-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{23}{20}\right)^2 = \frac{200(5-\sqrt{5}) - 529}{400} \\ &= \frac{471 - 200\sqrt{5}}{400} = \frac{2.355 - \sqrt{5}}{2} \\ &> \frac{2.3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{(2.3-\sqrt{5})(2.3+\sqrt{5})}{2(2.3+\sqrt{5})} = \frac{5.29 - 5}{2(2.3+\sqrt{5})} > 0 \end{aligned}$$

よって，正五角形の一辺の長さは 1.15 より大きい． ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a_n = \dfrac{S_n}{n} + (n-1)\cdot 2^n$ より　$na_n = S_n + n(n-1)\cdot 2^n$

$$(n+1)a_{n+1} = S_{n+1} + (n+1)n\cdot 2^{n+1}$$
$$na_n = S_n + n(n-1)\cdot 2^n$$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ に注意して，上の第 1 式から第 2 式を引くと

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = a_{n+1} + n(n+3)\cdot 2^n$$
$$na_{n+1} - na_n = n(n+3)\cdot 2^n$$
$$a_{n+1} - a_n = (n+3)\cdot 2^n \tag{1}$$

$(n+1)\cdot 2^{n+1} - n\cdot 2^n = (n+2)\cdot 2^n$,　$2^{n+1} - 2^n = 2^n$ の辺々を加えると

$$(n+2)\cdot 2^{n+1} - (n+1)\cdot 2^n = (n+3)\cdot 2^n \tag{2}$$

$(1) - (2)$ より　$a_{n+1} - a_n - (n+2)\cdot 2^{n+1} + (n+1)\cdot 2^n = 0$

$$a_{n+1} - (n+2)\cdot 2^{n+1} = a_n - (n+1)\cdot 2^n$$

$a_1 = 3$ より　$a_n - (n+1)\cdot 2^n = a_1 - (1+1)\cdot 2^1 = -1$

よって　$\boldsymbol{a_n = (n+1)\cdot 2^n - 1}$　■

5 恒等式 $f(x)+\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)\,dy = 2x^2+x+\frac{5}{3}$ より

$$f(x)+x^2\int_{-1}^{1} f(y)\,dy - 2x\int_{-1}^{1} yf(y)\,dy + \int_{-1}^{1} y^2 f(y)\,dy = 2x^2+x+\frac{5}{3} \qquad (*)$$

上式より，$f(x)$ は 2 次以下の整式であるから，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(y)\,dy &= \int_{-1}^{1}(ay^2+by+c)\,dy \\
&= \left[\frac{ay^3}{3}+\frac{by^2}{2}+cy\right]_{-1}^{1} = \frac{2a}{3}+2c \\
\int_{-1}^{1} yf(y)\,dy &= \int_{-1}^{1}(ay^3+by^2+cy)\,dy \\
&= \left[\frac{ay^4}{4}+\frac{by^3}{3}+\frac{cy^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2b}{3} \\
\int_{-1}^{1} y^2 f(y)\,dy &= \int_{-1}^{1}(ay^4+by^3+cy^2)\,dy \\
&= \left[\frac{ay^5}{5}+\frac{by^4}{4}+\frac{cy^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2a}{5}+\frac{2c}{3}
\end{aligned}$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$f(x)+\left(\frac{2a}{3}+2c\right)x^2-\frac{4b}{3}x+\frac{2a}{5}+\frac{2c}{3}=2x^2+x+\frac{5}{3}$$

整理すると　$f(x)=\left(-\frac{2a}{3}-2c+2\right)x^2+\left(\frac{4b}{3}+1\right)x-\frac{2a}{5}-\frac{2c}{3}+\frac{5}{3}$

$f(x)=ax^2+bx+c$ と同じ次数の項の係数を比較すると

$$a=-\frac{2a}{3}-2c+2, \quad b=\frac{4b}{3}+1, \quad c=-\frac{2a}{5}-\frac{2c}{3}+\frac{5}{3}$$

これを解いて　$a=0,\ b=-3,\ c=1$　よって　$\boldsymbol{f(x)=-3x+1}$ ■