令和４年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

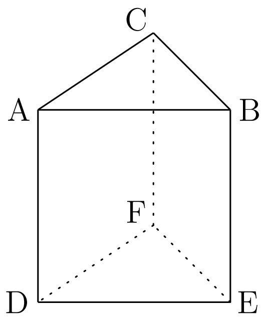
問題 1 2 3 4 5

1 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

2 下図の三角柱 ABC-DEF において，A を始点として，辺に沿って頂点を n 回移動する．すなわち，この移動経路

$$\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2 \to \cdots \to \mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{P}_n \qquad (\text{ただし } \mathrm{P}_0 = \mathrm{A})$$

において，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\cdots$，$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ はすべて辺であるとする．また，同じ頂点を何度通ってもよいものとする．このような移動経路で，終点 P_n が A，B，C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ．



3 xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 は直交し，交点の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ である．また，L_1，L_2 はともに $C : y = \dfrac{x^2}{4}$ に接している．このとき，L_1，L_2 および C で囲まれる図形の面積を求めよ．

4 a，b を正の実数とする．直線 $L : ax + by = 1$ と曲線 $y = -\dfrac{1}{x}$ との 2 つの交点のうち，y 座標が正のものを P，負のものを Q とする．また，L と x 軸との交点を R とし，L と y 軸との交点を S とする．a，b が条件

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}} = \sqrt{2}$$

を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点の軌跡を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 四面体 OABC が

$$\mathrm{OA} = 4, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 3, \quad \mathrm{OC} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

解答例

1 $2000 < 2022 < 2048$ より

$$\begin{aligned}
&\log_4 2022 < \log_4 2048 = \log_4 2^{11} = 5.5,\\
&\log_4 2022 > \log_4 2000 = \frac{\log_{10} 2000}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2 + 3}{2\log_{10} 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10} 2}\\
&\qquad\qquad > \frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 0.3011} = 0.5 + 4.98\cdots > 5.4
\end{aligned}$$

よって　　$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ ■

2 終点 P_n が A，B，C のいずれかとなるものの総数 a_n に対し，終点 P_n が D，E，F のいずれかとなるものの総数を b_n とする．

- P_n が A，B，C のいずれかであるとき，P_{n+1} も A，B，C のいずれかであるのは 2 通り (辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の取り方が 2 通り)，P_{n+1} が D，E，F のいずれかであるのは 1 通り (辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の取り方が 1 通り)．
- P_n が D，E，F のいずれかであるとき，P_{n+1} も D，E，F のいずれかであるのは 2 通り (辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の取り方が 2 通り)，P_{n+1} が A，B，C のいずれかであるのは 1 通り (辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の取り方が 1 通り)．

これより次の漸化式が成立する．

$$a_1 = 2,\quad b_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + b_n,\quad b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

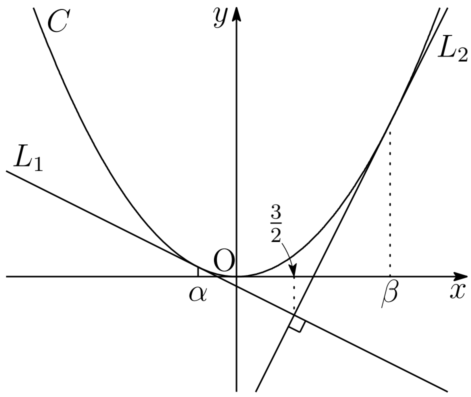
したがって　$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n),\quad a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$

上の 2 式から　$a_n + b_n = 3^{n-1}(a_1 + b_1) = 3^n,\quad a_n - b_n = a_1 - b_1 = 1$

よって　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{3^n + 1}{2}}$ ■

3 $C : y = \dfrac{x^2}{4}$ より　$y' = \dfrac{x}{2}$

C と L_1，L_2 の接点の x 座標をそれぞれ α，β とすると $(\alpha < \beta)$



L_1 の方程式は　$y - \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{\alpha}{2}(x - \alpha)$

すなわち　　　$L_1 : y = \dfrac{\alpha}{2}x - \dfrac{\alpha^2}{4}$

同様にして　　$L_2 : y = \dfrac{\beta}{2}x - \dfrac{\beta^2}{4}$

L_1 と L_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\beta}{2}x - \frac{\beta^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

条件から　$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{3}{2}$　ゆえに　$\alpha + \beta = 3$　$\cdots$①

L_1 と L_2 は直交するから　$\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\beta}{2} = -1$　ゆえに　$\alpha\beta = -4$　$\cdots$②

①，② より，α，β は，2 次方程式 $x^2 - 3x - 4 = 0$ の解であるから $(\alpha < \beta)$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1,\ \beta = 4$$

これより　　$L_1 : y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$，　$L_2 : y = 2x - 4$

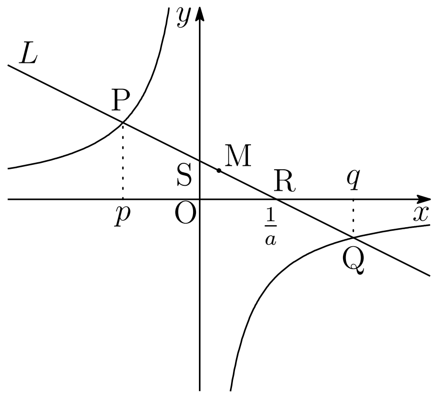
よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{x^2}{4} - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx + \int_{\frac{3}{2}}^{4} \left\{ \frac{x^2}{4} - (2x-4) \right\} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{3}{2}} (x+1)^2 + \frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}}^{4} (x-4)^2\,dx \\ &= \frac{1}{12}\Big[(x+1)^3 \Big]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}\Big[(x-4)^2 \Big]_{\frac{3}{2}}^{4} = \mathbf{\frac{125}{48}} \end{aligned}$$

補足　一般に放物線に接する 2 本の接線の接点の x 座標を α，β とすると，2 本の接線の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．また，本題の面積は，2 つの接点を通る直線と放物線で囲まれ部分の面積の $\dfrac{1}{2}$ である [1]．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 を参照)

4 直線 $L: ax+by=1$ と曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ との2つの交点P，Qの x 座標をそれぞれ $p,\ q$ とすると，条件から，$p<0,\ q>0$.



直線 L と曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ の方程式から y を消去すると

$$ax+b\left(-\frac{1}{x}\right)=1$$

すなわち　$ax^2-x-b=0$

これを解いて　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4ab}}{2a}$

ゆえに　$p=\dfrac{1-\sqrt{1+4ab}}{2a}$,　$q=\dfrac{1+\sqrt{1+4ab}}{2a}$

このとき　$\mathrm{PQ}:\mathrm{RS}=q-p:\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{1+4ab}}{a}:\dfrac{1}{a}=\sqrt{1+4ab}:1$

$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}=\sqrt{2}$ より　$\sqrt{1+4ab}=\sqrt{2}$　すなわち　$b=\dfrac{1}{4a}$　$\cdots$①

線分PQの中点をMとすると，Mの x 座標は　$\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{1}{2a}$

① に注意して，これを L の方程式に代入すると

$$a\cdot\frac{1}{2a}+by=1 \quad ゆえに \quad y=\frac{1}{2b}=2a$$

したがって，点Mの座標は　$\left(\dfrac{1}{2a},\ 2a\right)$

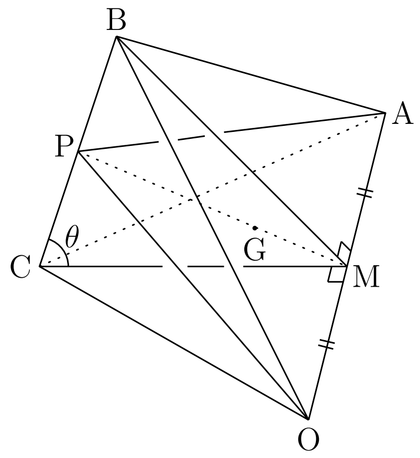
$a>0$ に注意して　$x=\dfrac{1}{2a}>0$，$y=2a$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{xy=1\ (x>0)}$　■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) OA の中点を M とすると，G は線分 PM を 2 : 1 に内分する点で，2 点 P，G は平面 MBC 上の点である．このとき，BO = AB，OC = AC より

$$\triangle\mathrm{ABM} \equiv \mathrm{OBM}, \quad \triangle\mathrm{ACM} \equiv \mathrm{OCM} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{MB}\perp\mathrm{OA}, \quad \mathrm{MC}\perp\mathrm{OA}$$

したがって　平面 MBC⊥OA　よって　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$



(2) (1) の結果から

$$\mathrm{MB} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$
$$\mathrm{CM} = \sqrt{\mathrm{OC}^2 - \mathrm{OM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$\theta = \angle\mathrm{BCM}$ とおき，$\triangle\mathrm{BCM}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CM}^2 - \mathrm{MB}^2}{2\mathrm{BC}{\cdot}\mathrm{CM}} = \frac{9+8-5}{2{\cdot}3{\cdot}2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これから　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

PG が最小となるとき，MP⊥BC であるから，求める最小値は

$$\frac{2}{3}\mathrm{MP} = \frac{2}{3}\mathrm{CM}\sin\theta = \frac{2}{3}{\cdot}2\sqrt{2}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

■