

令和3度 京都大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
総合人間(文系), 文, 教育(文系), 法, 経済(文系)

1 次の各問に答えよ.

(1) 10進法で表された数 6.75 を2進法で表せ. また, この数と2進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を2進法および4進法で表せ.

(2) $\triangle OAB$ において $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ とする. $\triangle OAB$ の垂心を H とするとき, \overrightarrow{OH} を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} を用いて表せ.

2 定積分 $\int_{-1}^1 \left| x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right| dx$ を求めよ.

3 n を2以上の整数とする. 1から n までの番号が付いた n 個の箱があり, それぞれの箱には赤玉と白玉が1個ずつ入っている. このとき操作(*)を $k = 1, \dots, n-1$ に対して, k が小さい方から順に1回ずつ行う.

(*) 番号 k の箱から玉を1個取り出し, 番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる.

一連の操作がすべて終了した後, 番号 n の箱から玉を1個取り出し, 番号1の箱に入れる. このとき番号1の箱に赤玉と白玉が1個ずつ入っている確率を求めよ.

4 空間の8点

$$O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 2, 0), C(0, 2, 0) \\ D(0, 0, 3), E(1, 0, 3), F(1, 2, 3), G(0, 2, 3)$$

を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える. 点 O , 点 F , 辺 AE 上の点 P , および辺 CG 上の点 Q の4点が同一平面上にあるとする. このとき, 四角形 $OPFQ$ の面積 S を最小にするような点 P および点 Q の座標を求めよ. また, そのときの S の値を求めよ.

5 p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数でないことを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad 6.75 = 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2^2 + 2 + 2^{-1} + 2^{-2} = \mathbf{110.11}_{(2)}$$

$$101.0101_{(2)} = 2^2 + 1 + 2^{-2} + 2^{-4}$$

$a = 2$ とおくと

$$\begin{aligned} 2^2 + 2 + 2^{-1} + 2^{-2} &= a^2 + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \\ &= a(a+1) + \frac{a+1}{a^2} = (a+1) \left(a + \frac{1}{a^2} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} (a+1)(a^3+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 1 + 2^{-2} + 2^{-4} &= a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} \\ &= a^2 + 1 + \frac{a^2+1}{a^4} = (a^2+1) \left(1 + \frac{1}{a^4} \right) \\ &= \frac{1}{a^4} (a^2+1)(a^4+1) \end{aligned}$$

$a^2 - 1 = a + 1$ に注意すると、上の2数の積を A とすると

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^6} (a+1)(a^3+1)(a^2+1)(a^4+1) \\ &= \frac{1}{a^6} (a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)(a^3+1) \\ &= \frac{1}{a^6} (a^8-1)(a^3+1) = \frac{1}{a^6} (a^{11} + a^8 - a^3 - 1) \end{aligned}$$

$a^8 - 1 = a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ に注意すると

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^6} (a^{11} + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^2 + a + 1) & (*) \\ &= a^5 + a + 1 + a^{-1} + a^{-2} + a^{-4} + a^{-5} + a^{-6} \end{aligned}$$

また、(*)において、 $b = a^2$ とおくと

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{b^3} (2b^5 + 2b^3 + b^3 + 2b^2 + b^2 + b + 2 + 1) \\ &= \frac{1}{b^3} (2b^5 + 3b^3 + 3b^2 + b + 3) \\ &= 2b^2 + 3 + 3b^{-1} + b^{-2} + 3b^{-3} \end{aligned}$$

求める2進法表示および4進法表示は

$$\mathbf{100011.110111}_{(2)}, \quad \mathbf{203.313}_{(4)}$$

(2) $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ より, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくと

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3$$

$\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと (x, y は実数), $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} &= (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} = (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ &= x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 3x + 4y - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{OA} &= (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} = (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{b}) \cdot \vec{a} \\ &= x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 9x + 3y - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② を解いて $x = \frac{1}{9}$, $y = \frac{2}{3}$

したがって $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

別解 $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ より,
2点 A, B からそれぞれ OB, OA に垂線
AN, BM を引くと

$$OM = 1, \quad ON = \frac{3}{2}$$

ゆえに $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$

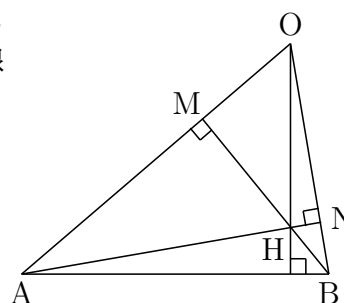
$\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ とおくと (x, y は実数)

$$\overrightarrow{OH} = 3x\overrightarrow{OM} + y\overrightarrow{ON} = x\overrightarrow{OA} + \frac{4}{3}y\overrightarrow{ON}$$

H は直線 MB および NA 上の点であるから

$$3x + y = x + \frac{4}{3}y = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{9}, \quad y = \frac{2}{3}$$

よって $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$



2 (1) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ とおくと

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - x - 1) = \frac{1}{2}(2x + 1)(x - 1)$$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

とおくと, 求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f(x)| dx &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \\ &= \left[F(x) \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \left[F(x) \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2F\left(-\frac{1}{2}\right) - F(1) - F(-1) \\ &= 2 \cdot \frac{7}{48} - \left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{19}{24} \end{aligned}$$

3 番号 k の箱から取り出した玉の色が番号 1 の箱から取り出した玉の色と同じである確率を p_k とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_1 = 1, \quad p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$$

したがって $p_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_k - \frac{1}{2}\right)$ ゆえに $p_k - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

すなわち $p_k = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$

求める確率は, 番号 n の箱から取り出した玉の色が番号 1 の箱から取り出した玉の色と同じである確率 p_n と一致するから

$$\frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

4 平面 AODE//平面 BCGF より

$$OP//QF \quad \dots \textcircled{1}$$

平面 OCGD//平面 ABFE より

$$OQ//PF \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, 四角形 OPFQ は, 平行四辺形である. P は辺 AE 上の点であるから

$$P(1, 0, t) \quad (0 \leq t \leq 3)$$

とおくと, $\vec{OP} = \vec{QF}$ より

$$\vec{OP} = \vec{OF} - \vec{OQ} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{OQ} = \vec{OF} - \vec{OP}$$

したがって $\vec{OQ} = (1, 2, 3) - (1, 0, t) = (0, 2, 3-t)$

このとき, Q は辺 CG の点であるから

$$0 \leq 3-t \leq 3 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq t \leq 3$$

平行四辺形 OPFQ の面積 S は

$$\begin{aligned} S^2 &= |\vec{OP}|^2 |\vec{OQ}|^2 - (\vec{OP} \cdot \vec{OQ})^2 \\ &= (1+t^2)\{2^2 + (3-t)^2\} - \{t(3-t)\}^2 \\ &= 4 + 4t^2 + (3-t)^2 \\ &= 5t^2 - 6t + 13 \\ &= 5\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5} \end{aligned}$$

$t = \frac{3}{5}$, すなわち, $P\left(1, 0, \frac{3}{5}\right)$, $Q\left(0, 2, \frac{12}{5}\right)$ のとき, S は最小値 $2\sqrt{\frac{14}{5}}$

5 (i) $p = 3$ のとき $p^4 + 14 = 3^4 + 14 = 95 = 5 \cdot 19$

(ii) p が 3 以外の素数のとき $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$

$$p^4 + 14 \geq 2^4 + 14 = 30, \quad p^4 + 14 \equiv 15 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって, p が素数ならば, $p^4 + 14$ は素数でない.

