令和２度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

$\boxed{1}$ a を負の実数とする．xy 平面上で曲線 $C : y = |x|x - 3x + 1$ と直線 $\ell : y = x + a$ のグラフが接するときの a の値を求めよ．このとき，C と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{2}$ x の 2 次関数で，そのグラフが $y = x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ．ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう．

$\boxed{3}$ a を奇数とし，整数 m，n に対して

$$f(m,\ n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8$$

とおく．$f(m,\ n)$ が 16 で割り切れるような整数の組 $(m,\ n)$ が存在するための a の条件を求めよ．

$\boxed{4}$ k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

$\boxed{5}$ 縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x>0$ のとき，$C: y=x^2-3x+1$ と
$\ell: y=x+a$ から y を消去すると

$$x^2-3x+1=x+a$$

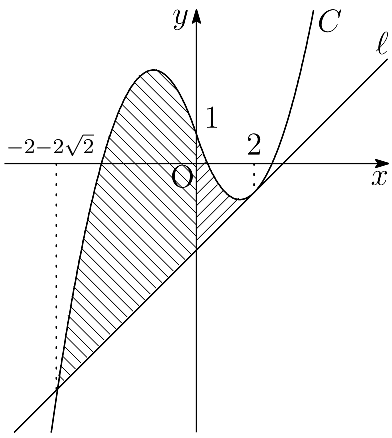
整理すると　$x^2-4x+1-a=0$　$\cdots$ ①

C と ℓ が接するとき，係数について

$$D/4=(-2)^2-1\cdot(1-a)=0$$

$a<0$ に注意して解くと　$a=-3$

このとき ① の解は　$x=2$



$x<0$ のとき，$C: y=-x^2-3x+1$ と $\ell: y=x+a$ から，y を消去すると

$$-x^2-3x+1=x+a \quad \text{ゆえに} \quad x^2+4x+a-1=0$$

C と ℓ が接するとき，係数について

$$D/4=2^2-1\cdot(a-1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=5$$

これは，$a<0$ に反するので，不適．よって，求める負の値 a は　$\boldsymbol{a=-3}$

$x<0$ において，$C: y=-x^2-3x+1$ と $\ell: y=x-3$ の共有点の x 座標は

$$-x^2-3x+1=x-3 \quad \text{ゆえに} \quad x^2+4x-4=0$$

$x<0$ に注意して，これを解くと　$x=-2-2\sqrt{2}$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-2-2\sqrt{2}}^{0}\{-x^2-3x+1-(x-3)\}\,dx \\
&\qquad\qquad+\int_0^2\{x^2-3x+1-(x-3)\}\,dx \\
&=\int_{-2-2\sqrt{2}}^{0}\{-(x+2)^2+8\}\,dx+\int_0^2(x-2)^2\,dx \\
&=\left[-\frac{1}{3}(x+2)^3+8x\right]_{-2-2\sqrt{2}}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2 \\
&=\boldsymbol{\frac{32}{3}\sqrt{2}+16}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x)=px^2+qx+r$ とすると $(p\neq 0)$　$f'(x)=2px+q$

$y=f(x)$ と $y=x^2$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ で直交するとき $(\alpha\neq\beta)$

$$\begin{cases} f(\alpha)=\alpha^2 \\ f(\beta)=\beta^2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*)\begin{cases} p\alpha^2+q\alpha+r=\alpha^2 \\ p\beta^2+q\beta+r=\beta^2 \end{cases}$$

また，$y=x^2$ より，$y'=2x$ であるから

$$\begin{cases} 2\alpha f'(\alpha)=-1 \\ 2\beta f'(\beta)=-1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (**)\begin{cases} 2\alpha(2p\alpha+q)=-1 \\ 2\beta(2p\beta+q)=-1 \end{cases}$$

$(*)$ より，$\alpha,\ \beta$ は次の 2 次方程式の解である．

$$pt^2+qt+r=t^2 \quad \text{すなわち} \quad (p-1)t^2+qt+r=0 \quad \cdots①$$

また，$(**)$ より，$\alpha,\ \beta$ は次の 2 次方程式の解である．

$$2t(2pt+q)=-1 \quad \text{すなわち} \quad 4pt^2+2qt+1=0 \quad \cdots②$$

①，② は，それぞれ，$p-1\neq 0$，$p\neq 0$ に注意して

$$t^2+\frac{q}{p-1}t+\frac{r}{p-1}=0, \quad t^2+\frac{q}{2p}t+\frac{1}{4p}=0$$

となり，これらの方程式は一致するから

$$\text{(A)} \quad \frac{q}{p-1}=\frac{q}{2p}, \quad \frac{r}{p-1}=\frac{1}{4p}$$

(A) の第 1 式から　$\dfrac{q(p+1)}{p(p-1)}=0$　ゆえに　$q=0$　または　$p=-1$

(i) $q=0$ のとき，(A) の第 2 式から　$r=\dfrac{p-1}{4p}$

① から，方程式は

$$(p-1)t^2+\frac{p-1}{4p}=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2=-\frac{1}{4p}$$

これが異なる 2 つの実数解をもつから　$-\dfrac{1}{4p}>0$　ゆえに　$p<0$

(ii) $p=-1$ のとき　これを (A) の第 2 式に代入して　$r=\dfrac{1}{2}$

① から，方程式は　$-2t^2+qt+\dfrac{1}{2}=0$　判別式は　$D=q^2+4>0$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{y=px^2+\frac{p-1}{4p}\ (p<0), \quad y=-x^2+qx+\frac{1}{2}\ (q\ \text{は任意の実数})}$$

$\boxed{\textbf{3}}$ $f(m,\ n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8$ (a は奇数) は，法 2 について

$$\begin{array}{lll} m \equiv 0,\ n \equiv 0 \text{ のとき} & f(m,\ n) \equiv 0 & \pmod 2 \\ m \equiv 1,\ n \equiv 0 \text{ のとき} & f(m,\ n) \equiv a \equiv 1 & \pmod 2 \\ m \equiv 0,\ n \equiv 1 \text{ のとき} & f(m,\ n) \equiv 1 & \pmod 2 \\ m \equiv 1,\ n \equiv 1 \text{ のとき} & f(m,\ n) \equiv 1 & \pmod 2 \end{array}$$

したがって，$m,\ n$ が共に偶数であることが $f(m,\ n)$ が 16 で割り切れるための必要条件である．そこで，$m = 2M$，$n = 2N$ とおくと (M，N は偶数)

$$f(m,\ n) = 4(2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2)$$

このとき，整数 M，N に対して

$$g(M,\ N) = 2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2$$

が 4 で割り切れるような整数の組 $(M,\ N)$ が存在するための a の条件を求めればよい．一般に，法 4 について

$$K \equiv 0,\ 2 \ \text{ のとき } \ K^2 \equiv 0, \quad K \equiv 1,\ 3 \ \text{ のとき } \ K^2 \equiv 1 \pmod 4$$

すなわち

$$K \text{ が偶数のとき } \ K^2 \equiv 0, \quad K \text{ が奇数のとき } \ K^2 \equiv 1 \pmod 4$$

これから，$g(M,\ N) = 2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2$ (a は奇数) は，法 4 について

$$\begin{array}{rlll} \text{(i)} & M,\ N \text{ がともに偶数のとき} & g(M,\ N) \equiv 2 & \pmod 4 \\ \text{(ii)} & M \text{ が偶数，} N \text{ が奇数のとき} & g(M,\ N) \equiv 3 & \pmod 4 \\ \text{(iii)} & M \text{ が奇数，} N \text{ が偶数のとき} & g(M,\ N) \equiv a + 2 & \pmod 4 \\ \text{(iv)} & M,\ N \text{ がともに奇数のとき} & g(M,\ N) \equiv a + 1 & \pmod 4 \end{array}$$

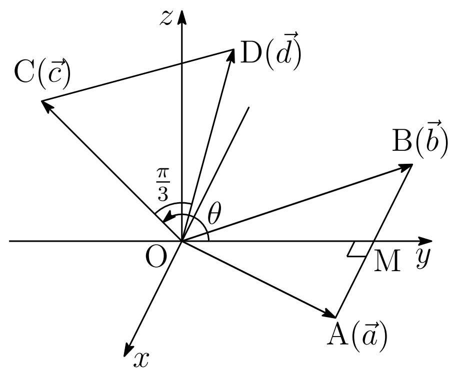
a は奇数であるから，$g(M,\ N)$ が 4 で割り切れるのは，(iv) の場合である．

$$a + 1 \equiv 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a \equiv 3 \pmod 4}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

とおくと　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2\\&=1-2\cdot\frac{1}{2}+1=1,\\|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2&=|\vec{d}-\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{c}|^2\\&=1-2\cdot\frac{1}{2}+1=1\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=1$ より，$\triangle$OAB，$\triangle$OCD は，正三角形である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

A，B を xy 平面上の点とすると，C，D は yz 平面上の点である．

辺 AB の中点を M とすると，$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{ゆえに}\quad \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は　$\dfrac{3\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の内積は　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d})=k>0$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は，鋭角であるから　$\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{12}$

よって　$k=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$

別解 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく．

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ より，2 つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ は垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ より

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2\pm 1 \quad (\text{複号同順})$$

直交する 2 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$ を次のようにおく．

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}+\vec{b}), \quad \vec{f}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\vec{a}-\vec{b}$$

$\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}-(\vec{c}\cdot\vec{f})\vec{f}$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ より

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\vec{e}&=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \vec{c}\cdot\vec{f}&=\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\end{aligned}$$

したがって，ベクトル $\vec{c}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．

$$\left|\sqrt{2}\vec{c}+\vec{e}\right|^2=2|\vec{c}|^2+2\sqrt{2}\,\vec{c}\cdot\vec{e}+|\vec{e}|^2=2+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1=1$$

$\vec{g}=\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e}$ とおくと，3 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$ は互いに直交する．

$$\begin{aligned}&\vec{d}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{\sqrt{3}}k, \quad \vec{d}\cdot\vec{f}=\vec{d}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\\ &\vec{d}\cdot\vec{g}=\vec{d}\cdot(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}k\end{aligned}$$

$\vec{d}=(\vec{d}\cdot\vec{e})\vec{e}+(\vec{d}\cdot\vec{f})\vec{f}+(\vec{d}\cdot\vec{g})\vec{g}$ より　$\vec{d}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\vec{e}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)\vec{g}$

$|\vec{d}|^2=1$ であるから　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2=1$

整理すると　$8k^2+2\sqrt{6}k-\dfrac{3}{2}=0$　これを解いて　$k=\dfrac{-\sqrt{6}\pm 3\sqrt{2}}{8}$

条件より，$k>0$ であるから　$\boldsymbol{k=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1 行目に A，B，C，D を固定し，本題の条件を満たすように，2 行目〜4 行目を並べたとき，行ごと入れ替えても，条件は満たされる．そこで，第 2 行第 1 列目から第 4 行第 1 列目までを上から順に，B，C，D とすると，第 2 行第 2 列に配置する文字 X (X = A, C, D) の場合に分けてその総数を求める．

A	B	C	D
2 行 目			
3 行 目			
4 行 目			

A	B	C	D
B	**X**		
C			
D			

第 2 行第 2 列に配置される A，C，D の場合の数は，それぞれ，2, 1, 1 通りある．

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	**C**	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	**D**	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

1，2，3，4 を A，B，C，D に 1 対 1 に対応させる (全単射) 場合の数は 4! 通り．
2 行目〜4 行目までの入れ替えの総数は 3! 通り．これと場合分けの総数により

$$4! \times 3! \times (2 + 1 + 1) = \mathbf{576}\ (\text{通り})$$