

平成31年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分  
総合人間(文系), 文, 教育(文系), 法, 経済(文系)

1 次の各問に答えよ.

(1)  $a$  は実数とする.  $x$  に関する整式  $x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2$  を整式  $x^3 + x^2 + x + 1$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $R(x)$  とする.  $R(x)$  の  $x$  の1次の項の係数が1のとき,  $a$  の値を定め, さらに  $Q(x)$  と  $R(x)$  を求めよ.

(2)  $8.94^{18}$  の整数部分は何桁か. また最高位からの2桁の数字を求めよ. 例えば,  $12345.6789$  の最高位からの2桁は12を指す.

2  $a$  は実数とし,  $b$  は正の定数とする.  $x$  の関数  $f(x) = x^2 + 2(ax + b|x|)$  の最小値  $m$  を求めよ. さらに,  $a$  の値が変化するとき,  $a$  の値を横軸に,  $m$  の値を縦軸にとって  $m$  のグラフをかけ.

3  $a, b, c$  は実数とする. 次の命題が成立するための,  $a$  と  $c$  がみたすべき必要十分条件を求めよ. さらに, この  $(a, c)$  の範囲を図示せよ.

命題: すべての実数  $b$  に対して, ある実数  $x$  が不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  をみたす.

4 1つのさいころを  $n$  回続けて投げ, 出た目を順に  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする. このとき次の条件をみたす確率を  $n$  を用いて表せ. ただし  $X_0 = 0$  としておく.

条件:  $1 \leq k \leq n$  をみたす  $k$  のうち,  $X_{k-1} \leq 4$  かつ  $X_k \geq 5$  が成立するような  $k$  の値はただ1つである.

5 半径1の球面上の5点  $A, B_1, B_2, B_3, B_4$  は, 正方形  $B_1B_2B_3B_4$  を底面とする四角錐をなしている. この5点が球面上を動くとき, 四角錐  $AB_1B_2B_3B_4$  の体積の最大値を求めよ.

常用対数表は次ページにある.

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで掲載している。

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで掲載している。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + a - 2) \\ + (3 - a)x^2 + (4 - a)x + 4 - a$$

$R(x)$  の1次の項の係数が1であるから

$$4 - a = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 3$$

$$\text{よって} \quad Q(x) = x^2 + x + 1, \quad R(x) = x + 1$$

補足  $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$  であるから, 法  $x^3 + x^2 + x + 1$  について

$$x^4 \equiv 1, \quad x^5 \equiv x, \quad x^3 \equiv -x^2 - x - 1,$$

$$x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2 \equiv x + 2 \cdot 1 + a(-x^2 - x - 1) + 3x^2 + 3x + 2 \\ \equiv (3 - a)x^2 + (4 - a)x + 4 - a$$

$$\text{したがって} \quad R(x) = (3 - a)x^2 + (4 - a)x + 4 - a$$

(2) 常用対数表から,  $0.95125 \leq \log_{10} 8.94 < 0.95135$  であるから

$$18 \times 0.95125 \leq 18 \log_{10} 8.94 < 18 \times 0.95135$$

$$17.1225 \leq \log_{10} 8.94^{18} < 17.1243$$

$$10^{0.1225} \times 10^{17} \leq 8.94^{18} < 10^{0.1243} \times 10^{17}$$

常用対数表から,  $\log_{10} 1.32 < 0.12065$ ,  $0.12705 \leq \log_{10} 1.34$  であるから

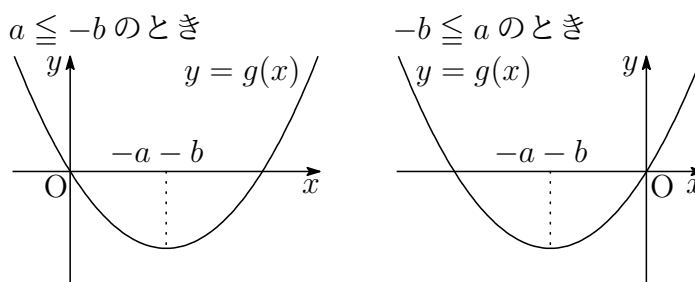
$$1.32 \times 10^{17} < 8.94^{18} < 1.34 \times 10^{17}$$

よって 整数部分の桁数は 18 桁, 最高位の2桁は 13

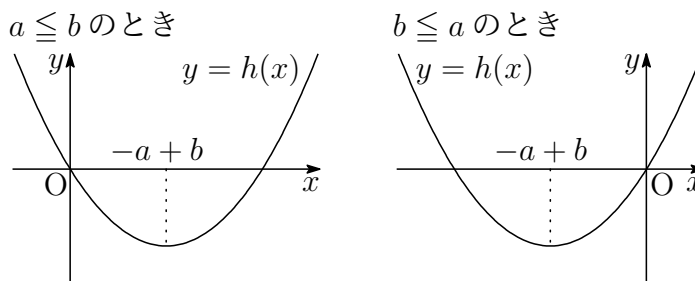
2  $g(x) = x^2 + 2(a+b)x$ ,  $h(x) = x^2 + 2(a-b)x$  とおくと

$$f(x) = x^2 + 2(ax + 2b|x|) = \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ h(x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

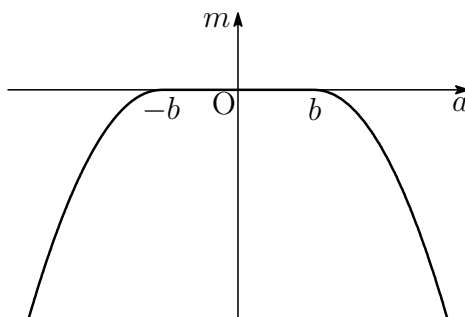
- (i)  $g(x) = (x+a+b)^2 - (a+b)^2$  であるから ( $x \geq 0$ )  
 $-a-b \geq 0$ , すなわち,  $a \leq -b$  のとき  $m = g(-a-b) = -(a+b)^2$   
 $-a-b \leq 0$ , すなわち,  $-b \leq a$  のとき  $m = g(0) = 0$



- (ii)  $h(x) = (x+a-b)^2 - (a-b)^2$  であるから ( $x \leq 0$ )  
 $-a+b \geq 0$ , すなわち,  $a \leq b$  のとき  $m = h(0) = 0$   
 $-a+b \leq 0$ , すなわち,  $b \leq a$  のとき  $m = h(-a+b) = -(a-b)^2$



(i), (ii) の結果から  $m = \begin{cases} -(a+b)^2 & (a \leq -b) \\ 0 & (-b \leq a \leq b) \\ -(a-b)^2 & (b \leq a) \end{cases}$



3 関数  $y = ax^2 + bx + c \dots (*)$

(i)  $a < 0$  のとき, 放物線  $(*)$  は,  $b, c$  の値に関係なく,  $y < 0$  を満たす  $x$  が存在する.

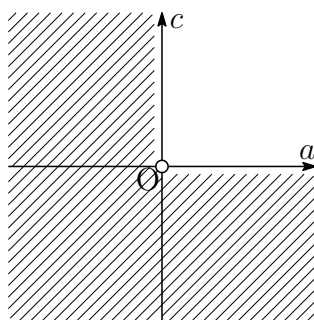
(ii)  $a = 0$  のとき, 直線  $y = bx + c$  は, すべての  $b$  について,  $c < 0$  のとき,  $y < 0$  を満たす  $x (x = 0)$  が存在する.

(iii)  $a > 0$  のとき, 放物線  $(*)$  が,  $y < 0$  を満たす  $x$  をもつとき, 係数について

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac < \frac{b^2}{4}$$

すべての実数  $b$  について, 上式が成立するから  $ac < 0$  ゆえに  $c < 0$

(i)~(iii) から  $a < 0$  または 「 $a \geq 0$  かつ  $c < 0$ 」



4 連続して  $i$  回 4 以下の事象を  $A_i$ , 連続して  $j$  回 5 以上の事象を  $B_j$  とすると,  $A_i B_j A_k$  の順に起きる確率であるから ( $i, k \geq 0, j \geq 1, i + j + k = n$ )

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i, k \geq 0, j \geq 1, \\ i + j + k = n}} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{\substack{i \geq 0, k \geq 0, \\ i + k \leq n-1}} \frac{2^{i+k}}{3^n} = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^i \\ &= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (2^{n-k} - 1) = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) \\ &= \frac{1}{3^n} \{n \cdot 2^n - (2^n - 1)\} = \frac{(n-1) \cdot 2^n + 1}{3^n} \end{aligned}$$

- 5 原点  $O$  を中心とする球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上に 4 点  $(\pm a, \pm a, b)$  および点  $(0, 0, 1)$  の 5 点を頂点する四角錐の体積  $V$  とすると ( $a > 0$ )

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad V = \frac{1}{3}(2a)^2(1-b) = \frac{4}{3}a^2(1-b)$$

$$a \text{ を消去すると } V = \frac{2}{3}(1-b^2)(1-b) = \frac{2}{3}(1+b)(1-b)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$-1 < b < 1$  であるから、3 正数  $2(1+b)$ ,  $1-b$ ,  $1-b$  の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2(1+b) + (1-b) + (1-b)}{3} \geq \sqrt[3]{2(1+b)(1-b)^2}$$

$$\text{したがって } (1+b)(1-b)^2 \leq \frac{32}{27} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ で等号が成立するとき } 2(1+b) = 1-b \quad \text{すなわち } b = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } V \leq \frac{64}{81} \quad \text{よって, 最大値は } \frac{64}{81}$$