

平成30年度 京都大学 2次試験前期日程(数学問題)120分  
総合人間(文系), 文, 教育(文系), 法, 経済(文系)

問題 1 2 3 4 5

1  $a$  は正の実数とし, 座標平面内の点  $(x_0, y_0)$  は2つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり,  $|x_0| \neq 1$  を満たすとする.  $C_1$  と  $C_2$  が  $(x_0, y_0)$  で共通の接線をもつとき,  $C_1$  と  $C_2$  で囲まれる部分の面積を求めよ.

2 1辺の長さが1の正方形 ABCD において, 辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り, 線分 AP の垂直二等分線が辺 AB, 辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q, R とする.

(1) 線分 QR の長さを  $\sin \angle BAP$  を用いて表せ.

(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ.

3  $n^3 - 7n + 9$  が素数となるような整数  $n$  をすべて求めよ.

4 四面体 ABCD は  $AC = BD$ ,  $AD = BC$  を満たすとし, 辺 AB の中点を P, 辺 CD の中点を Q とする.

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ.

(2) 線分 PQ を含む平面  $\alpha$  で四面体 ABCD を切って2つの部分に分ける. このとき, 2つの部分の体積は等しいことを示せ.

5 整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して、次の一連の操作を考える。ただし各球に書かれている整数は1つのみとする。

- (i) 袋から無作為に球を1個取り出し、その球に書かれている整数を  $k$  とする。
- (ii)  $k \neq 0$  の場合、整数  $k$  が書かれた球を1個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。
- (iii)  $k = 0$  の場合、袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より1大きい整数が書かれた球を1個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。

整数0が書かれている球が1個入っており他の球が入っていない袋を用意する。この袋に上の一連の操作を繰り返し  $n$  回行った後に、袋の中にある球に書かれている  $n+1$  個の数の合計を  $X_n$  とする。例えば  $X_1$  は常に1である。以下  $n \geq 2$  として次の問に答えよ。

- (1)  $X_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$  である確率を求めよ。
- (2)  $X_n \leq n+1$  である確率を求めよ。

## 解答例

1  $f(x) = |x^2 - 1|$ ,  $g(x) = x^2 - 2ax + 2$  とおくと

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (|x| > 1) \\ -2x & (|x| < 1) \end{cases}, \quad g'(x) = 2x - 2a$$

$f(x_0) = g(x_0)$ ,  $f'(x_0) = g'(x_0)$  であるから

(i)  $|x_0| > 1$  のとき

$$x_0^2 - 1 = x_0^2 - 2ax_0 + 2, \quad 2x_0 = 2x_0 - 2a$$

上の第2式から,  $a = 0$  となり,  $a > 0$  に反するので不適.

(ii)  $|x_0| < 1$  のとき

$$-x_0^2 + 1 = x_0^2 - 2ax_0 + 2, \quad -2x_0 = 2x_0 - 2a$$

$$\text{整理すると} \quad \begin{cases} 2x_0^2 - 2ax_0 + 1 = 0 \\ x_0 = \frac{a}{2} \end{cases}$$

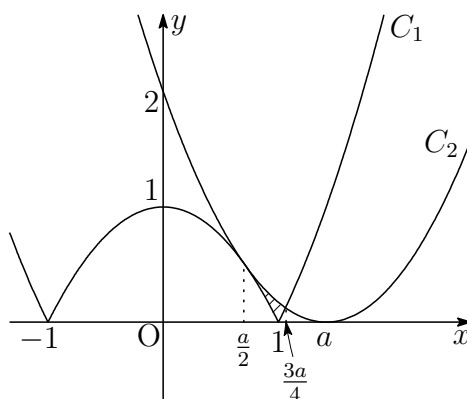
上の第2式を第1式に代入すると  $-\frac{a^2}{2} + 1 = 0$

$a > 0$  および  $|x_0| < 1$  に注意して  $a = \sqrt{2}$ ,  $x_0 = \frac{a}{2}$

$C_1 : y = |x^2 - 1|$  と  $C_2 : y = (x - a)^2$  の接点以外の共有点の  $x$  座標は

$$x^2 - 1 = (x - a)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a^2 + 1}{2a} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3a}{4}$$

求める面積は, 下の図の斜線部分の面積である.



よって、求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} \{(x-a)^2 - |x^2-1|\} dx \\
 &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} (x-a)^2 dx + \int_{\frac{a}{2}}^1 (x^2-1) dx - \int_1^{\frac{3a}{4}} (x^2-1) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{3}(x-a)^3 \right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} + \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_{\frac{a}{2}}^1 - \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_1^{\frac{3a}{4}} \\
 &= -\frac{7a^3}{48} + \frac{5a}{4} - \frac{4}{3} = \frac{23}{24}\sqrt{2} - \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

■

- 2 (1)  $\theta = \angle BAP$  とし ( $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ), 正方形 ABCD を右の図のように座標平面にとる. 線分 AP の中点を  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\tan \theta}{2}\right)$  とすると, AP の垂直二等分線は, M を通り傾き  $-\frac{1}{\tan \theta}$  の直線であるから

$$y - \frac{\tan \theta}{2} = -\frac{1}{\tan \theta} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

すなわち  $y = -\frac{x}{\tan \theta} + \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta} \dots (*)$

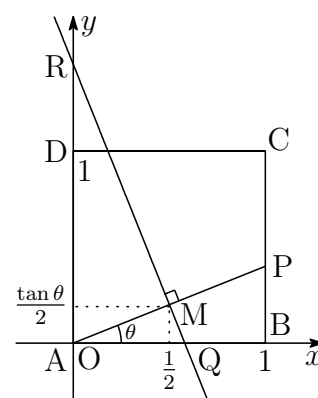
(\*) の方程式から  $R\left(0, \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta}\right)$

(\*) に  $y = 0$  を代入すると  $x = \frac{1}{2 \cos^2 \theta}$  ゆえに  $Q\left(\frac{1}{2 \cos^2 \theta}, 0\right)$

したがって  $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2 \cos \theta} \left(-\frac{1}{\cos \theta}, \frac{1}{\sin \theta}\right)$

$$\begin{aligned}
 QR &= |\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2 \cos \theta} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta)} \dots (*)
 \end{aligned}$$

よって  $QR = \frac{1}{2 \sin \angle BAP (1 - \sin^2 \angle BAP)}$



(2)  $t = \sin \theta$  とすると  $0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(t) = 2t(1 - t^2) \text{ とおくと } f'(t) = 2 - 6t^2 = 2(1 - 3t^2)$$

$t$	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

(\*) より, 線分 QR の最小値は  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  ■

**3** 与えられた整式を変形すると

$$n^3 - 7n + 9 = (n - 1)n(n + 1) - 3(2n - 3) \quad \dots (*)$$

連続する 3 整数の積  $(n - 1)n(n + 1)$  は 3 の倍数であるから, (\*) は 3 の倍数である. これが素数であるとき, その値は 3 であるから

$$n^3 - 7n + 9 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad (n - 1)(n - 2)(n + 3) = 0$$

よって, 求める整数  $n$  は  $n = 1, 2, -3$  ■

4 (1)  $\triangle ACD$  と  $\triangle BDC$  について

$AC = BD$ ,  $AD = BC$ ,  $CD$  は共通

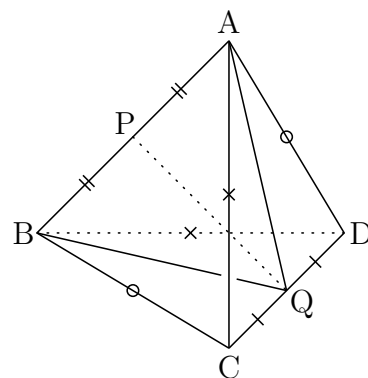
3 辺相等により  $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$

したがって  $\angle ACQ = \angle BDQ$

$\triangle ACQ$  と  $\triangle BDQ$  について, 2 辺夾角相等  
により  $\triangle ACQ \equiv \triangle BDQ$

したがって  $AQ = BQ$

よって,  $PQ$  は二等辺三角形  $ABQ$  の中線  
であるから  $AB \perp PQ$



別解 
$$\vec{PQ} = \vec{PA} + \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$$

$$\vec{PQ} = \vec{PB} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BD})$$

$\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$  に注意して, 上の 2 式の辺々  
を加えて 2 倍すると

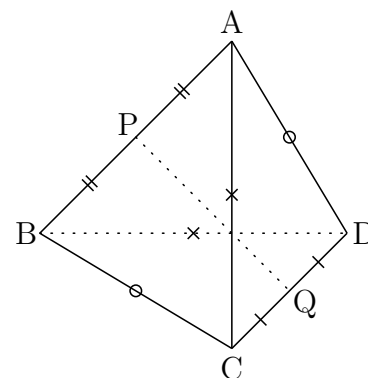
$$4\vec{PQ} = \vec{AC} + \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{BD}$$

したがって

$$\begin{aligned} 4\vec{PQ} \cdot \vec{AB} &= (\vec{AC} + \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{BD}) \cdot \vec{AB} \\ &= (\vec{AC} + \vec{BC}) \cdot \vec{AB} + (\vec{AD} + \vec{BD}) \cdot \vec{AB} \\ &= (\vec{AC} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AC} - \vec{BC}) + (\vec{AD} + \vec{BD}) \cdot (\vec{AD} - \vec{BD}) \\ &= |\vec{AC}|^2 - |\vec{BC}|^2 + |\vec{AD}|^2 - |\vec{BD}|^2 \end{aligned}$$

$|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ ,  $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$  であるから

$$\vec{PQ} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{よって} \quad AB \perp PQ$$



補足 同様にして

$$\begin{aligned} 4\vec{PQ} \cdot \vec{CD} &= (\vec{AD} + \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{BC}) \cdot \vec{CD} \\ &= (\vec{AD} + \vec{AC}) \cdot \vec{CD} + (\vec{BD} + \vec{BC}) \cdot \vec{CD} \\ &= (\vec{AD} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) + (\vec{BD} + \vec{BC}) \cdot (\vec{BD} - \vec{BC}) \\ &= |\vec{AD}|^2 - |\vec{AC}|^2 + |\vec{BD}|^2 - |\vec{BC}|^2 \end{aligned}$$

$|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ ,  $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$  であるから

$$\vec{PQ} \cdot \vec{CD} = 0 \quad \text{よって} \quad CD \perp PQ$$

(2)  $\triangle ABC$  と  $\triangle ABD$  について

$AC = BD$ ,  $BC = AD$ ,  $AB$  は共通

3 辺相等により  $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

したがって  $\angle CAP = \angle DBP$

$\triangle CAP$  と  $\triangle DBP$  について, 2 辺夾角相等  
により  $\triangle CAP \cong \triangle DBP$

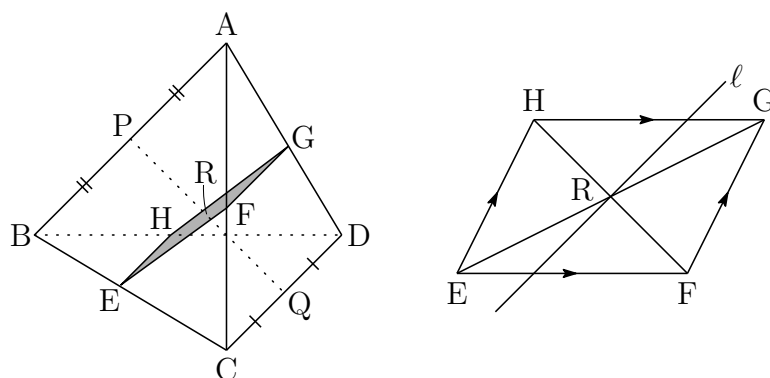
したがって  $CP = DP$

よって,  $PQ$  は二等辺三角形  $CDP$  の中線  
であるから  $CD \perp PQ$

線分  $PQ$  上に点  $R$  とり,  $R$  を通り線分  $PQ$  に垂直な平面と辺  $BC$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  
 $BD$  との交点を, それぞれ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  とすると

$BA \parallel EF$ ,  $BA \parallel HG$ ,  $CD \parallel EH$ ,  $CD \parallel FG$

ゆえに  $EF \parallel HG$ ,  $EH \parallel FG$  すなわち 四角形  $EFGH$  は平行四辺形



$PQ$  を含む平面  $\alpha$  と平行四辺形  $EFGH$  との交線を  $l$  とすると,  $l$  によって  
平行四辺形  $EFGH$  の面積は二等分される.

よって,  $\alpha$  によって, 四面体  $ABCD$  の体積は二等分される. ■

5 (1) (i)  $n$  回とも整数 0 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

(ii)  $n-1$  回目まで整数 0 が書かれた球を取り出し,  $n$  回目に整数  $n-1$  が書かれた球を取り出すとき

$$\begin{aligned} X_n &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n-1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

(i),(ii) 以外のとき,  $X_n < \frac{(n+2)(n-1)}{2}$  となるから, 求める確率は

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{2}{n!}$$

(2) (i) 2 回目以降すべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0 + \overbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}^{n \text{ 個}} = n \leq n + 1$$

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

(ii) 2 回目以降,  $j$  回目だけ整数 0 が書かれた球を取り出し,  $j$  回目以外はすべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき ( $j = 2, 3, \dots, n$ )

$$X_n = 0 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \overbrace{2}^{j \text{ 回目}} + 1 + \cdots + 1 = n + 1$$

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{j-2}{j-1} \cdot \frac{1}{j} \cdot \frac{j-1}{j+1} \cdots \frac{n-2}{n} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

(i),(ii) 以外のとき,  $X_n > n + 1$  となるから, 求める確率は

$$\frac{1}{n} + \frac{(n-2)!}{n!} \cdot (n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

