# 平成30年度　京都大学　２次試験前期日程(数学問題)120分
# 総合人間(文系)，文，教育(文系)，法，経済(文系)

**1** $a$ は正の実数とし，座標平面内の点 $(x_0,\ y_0)$ は2つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり，$|x_0| \neq 1$ を満たすとする．$C_1$ と $C_2$ が $(x_0,\ y_0)$ で共通の接線をもつとき，$C_1$ と $C_2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

**2** 1辺の長さが1の正方形ABCDにおいて，辺BC上にBとは異なる点Pを取り，線分APの垂直2等分線が辺AB，辺ADまたはその延長と交わる点をそれぞれQ，Rとする．

(1) 線分QRの長さを $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を用いて表せ．

(2) 点Pが動くときの線分QRの長さの最小値を求めよ．

**3** $n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 $n$ をすべて求めよ．

**4** 四面体ABCDは $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$，$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ を満たすとし，辺ABの中点をP，辺CDの中点をQとする．

(1) 辺ABと線分PQは垂直であることを示せ．

(2) 線分PQを含む平面 $\alpha$ で四面体ABCDを切って2つの部分に分ける．このとき，2つの部分の体積は等しいことを示せ．

**5** 整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える．ただし各球に書かれている整数は1つのみとする．

(i) 袋から無作為に球を1個取り出し，その球に書かれている整数を $k$ とする．

(ii) $k \neq 0$ の場合，整数 $k$ が書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

(iii) $k = 0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より1大きい整数が書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

整数0が書かれている球が1個入っており他の球が入っていない袋を用意する．この袋に上の一連の操作を繰り返し $n$ 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を $X_n$ とする．例えば $X_1$ は常に1である．以下 $n \geqq 2$ として次の問に答えよ．

(1) $X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ．

(2) $X_n \leqq n + 1$ である確率を求めよ．

**解答例**

$\boxed{1}$ $f(x)=|x^2-1|$，$g(x)=x^2-2ax+2$ とおくと

$$f'(x)=\begin{cases}2x & (|x|>1)\\ -2x & (|x|<1)\end{cases},\quad g'(x)=2x-2a$$

$f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)=g'(x_0)$ であるから

(i) $|x_0|>1$ のとき

$$x_0{}^2-1=x_0{}^2-2ax_0+2,\quad 2x_0=2x_0-2a$$

上の第 2 式から，$a=0$ となり，$a>0$ に反するので不適.

(ii) $|x_0|<1$ のとき

$$-x_0{}^2+1=x_0{}^2-2ax_0+2,\quad -2x_0=2x_0-2a$$

整理すると $\begin{cases}2x_0{}^2-2ax_0+1=0\\ x_0=\dfrac{a}{2}\end{cases}$

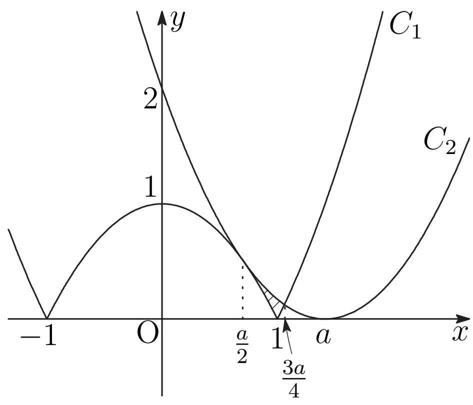
上の第 2 式を第 1 式に代入すると $-\dfrac{a^2}{2}+1=0$

$a>0$ および $|x_0|<1$ に注意して $a=\sqrt{2}$，$x_0=\dfrac{a}{2}$

$C_1: y=|x^2-1|$ と $C_2: y=(x-a)^2$ の接点以外の共有点の $x$ 座標は

$$x^2-1=(x-a)^2 \quad ゆえに \quad x=\frac{a^2+1}{2a}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{3a}{4}$$

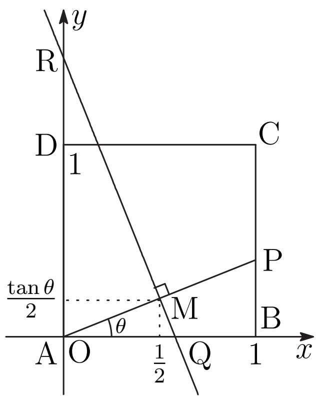
求める面積は，下の図の斜線部分の面積である.



よって，求める面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} \{(x-a)^2 - |x^2-1|\}\,dx \\
&= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} (x-a)^2\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{1} (x^2-1)\,dx - \int_{1}^{\frac{3a}{4}} (x^2-1)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{\frac{a}{2}}^{1} - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{\frac{3a}{4}} \\
&= -\frac{7a^3}{48} + \frac{5a}{4} - \frac{4}{3} = \boldsymbol{\frac{23}{24}\sqrt{2} - \frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ (1) $\theta = \angle\mathrm{BAP}$ とし $(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4})$，正方形 ABCD を右の図のように座標平面にとる．線分 AP の中点を $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, \frac{\tan\theta}{2}\right)$ とすると，AP の垂直二等分線は，M を通り傾き $-\frac{1}{\tan\theta}$ の直線であるから




$$y - \frac{\tan\theta}{2} = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

すなわち　$y = -\dfrac{x}{\tan\theta} + \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}$　$\cdots(*)$

$(*)$ の方程式から　$\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\right)$

$(*)$ に $y=0$ を代入すると　$x = \dfrac{1}{2\cos^2\theta}$　ゆえに　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2\cos^2\theta},\ 0\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \dfrac{1}{2\cos\theta}\left(-\dfrac{1}{\cos\theta},\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{QR} = |\overrightarrow{\mathrm{QR}}| &= \frac{1}{2\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}} \\
&= \frac{1}{2\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{QR} = \dfrac{1}{2\sin\angle\mathrm{BAP}(1-\sin^2\angle\mathrm{BAP})}}$

(2) $t=\sin\theta$ とすると　$0<t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f(t)=2t(1-t^2)$ とおくと　$f'(t)=2-6t^2=2(1-3t^2)$

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |

$(*)$ より，線分 QR の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 与えらえた整式を変形すると

$$n^3-7n+9=(n-1)n(n+1)-3(2n-3) \quad \cdots(*)$$

連続する 3 整数の積 $(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数であるから，$(*)$ は 3 の倍数である．これが素数であるとき，その値は 3 であるから

$$n^3-7n+9=3 \quad \text{ゆえに} \quad (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

よって，求める整数 $n$ は　$\boldsymbol{n=1,\ 2, -3}$

$\boxed{4}$ (1) $\triangle$ACD と $\triangle$BDC について

$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$，CD は共通

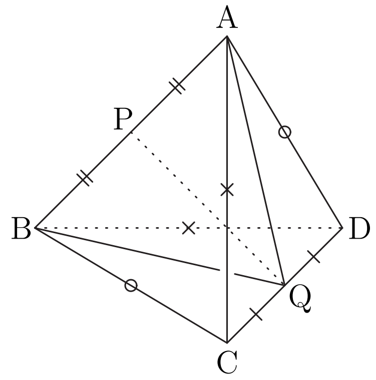
3 辺相等により　$\triangle\mathrm{ACD}\equiv\triangle\mathrm{BDC}$

したがって　$\angle\mathrm{ACQ}=\angle\mathrm{BDQ}$

$\triangle$ACQ と $\triangle$BDQ について，2 辺夾角相等により　$\triangle\mathrm{ACQ}\equiv\triangle\mathrm{BDQ}$

したがって　$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}$

よって，PQ は二等辺三角形 ABQ の中線であるから　$\mathrm{AB}\perp\mathrm{PQ}$



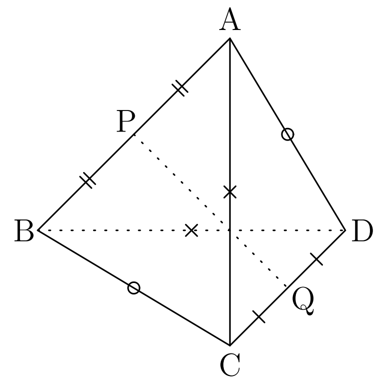

**別解**

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$ に注意して，上の 2 式の辺々を加えて 2 倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$




したがって

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\quad\text{よって}\quad\mathrm{AB}\perp\mathrm{PQ}$$

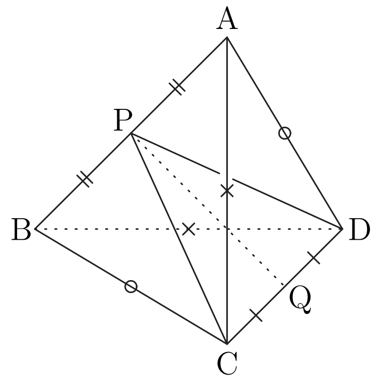
**補足** 同様にして

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+(\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0\quad\text{よって}\quad\mathrm{CD}\perp\mathrm{PQ}$$

(2) △ABC と △ABD について




AC = BD，BC = AD，AB は共通

3 辺相等により　△ABC ≡ ABD

したがって　∠CAP = ∠DBP

△CAP と △DBP について，2 辺夾角相等により　△CAP ≡ △DBP

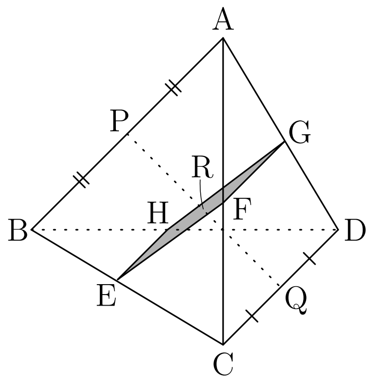
したがって　CP = DP

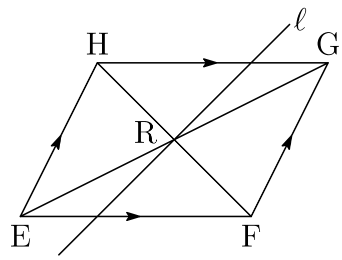
よって，PQ は二等辺三角形 CDP の中線であるから　CD⊥PQ

線分 PQ 上に点 R とり，R を通り線分 PQ に垂直な平面と辺 BC，AC，AD，BD との交点を，それぞれ，E，F，G，H とすると

$$\mathrm{BA}/\!/\mathrm{EF},\quad \mathrm{BA}/\!/\mathrm{HG},\quad \mathrm{CD}/\!/\mathrm{EH},\quad \mathrm{CD}/\!/\mathrm{FG}$$

ゆえに　EF//HG，EH//FG　すなわち　四角形 EFGH は平行四辺形




PQ を含む平面 $\alpha$ と平行四辺形 EFGH との交線を $\ell$ とすると，$\ell$ によって平行四辺形 EFGH の面積は二等分される．

よって，$\alpha$ によって，四面体 ABCD の体積は二等分される．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) (i) $n$ 回とも整数 $0$ が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \geqq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdots\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n!}$

(ii) $n-1$ 回目まで整数 $0$ が書かれた球を取り出し，$n$ 回目に整数 $n-1$ が書かれた球を取り出すとき

$$\begin{aligned} X_n &= 0+1+2+\cdots+(n-1)+n-1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \end{aligned}$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdots\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n!}$

(i),(ii) 以外のとき，$X_n < \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ となるから，求める確率は

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = \boldsymbol{\frac{2}{n!}}$$

(2) (i) 2 回目以降すべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0 + \overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{n\text{ 個}} = n \leqq n+1$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

(ii) 2 回目以降，$j$ 回目だけ整数 $0$ が書かれた球を取り出し，$j$ 回目以外はすべて整数 $1$ が書かれた球を取り出すとき $(j = 2, 3, \cdots, n)$

$$X_n = 0+1+1+1+\cdots+1 \overset{j\text{ 回目}}{+2} +1+\cdots+1 = n+1$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{j-2}{j-1}\cdot\dfrac{1}{j}\cdot\dfrac{j-1}{j+1}\cdots\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{(n-2)!}{n!}$

(i),(ii) 以外のとき，$X_n > n+1$ となるから，求める確率は

$$\frac{1}{n} + \frac{(n-2)!}{n!}\cdot(n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \boldsymbol{\frac{2}{n}}$$