

平成29年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分  
総合人間(文系), 文, 教育(文系), 法, 経済(文系)

問題 1 2 3 4 5

1 曲線  $y = x^3 - 4x + 1$  を  $C$  とする. 直線  $l$  は  $C$  の接線であり, 点  $P(3, 0)$  を通るものとする. また,  $l$  の傾きは負であるとする. このとき,  $C$  と  $l$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ.

2 次の問に答えよ. ただし,  $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$  であることは用いてよい.

(1) 100 桁以下の自然数で, 2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ.

(2) 100 桁の自然数で, 2 と 5 以外に素因数を持たないものの個数を求めよ.

3 座標空間において原点  $O$  と点  $A(0, -1, 1)$  を通る直線を  $l$  とし, 点  $B(0, 2, 1)$  と点  $C(-2, 2, -3)$  を通る直線を  $m$  とする.  $l$  上の 2 点  $P, Q$  と,  $m$  上の点  $R$  を  $\triangle PQR$  が正三角形となるようにとる. このとき,  $\triangle PQR$  の面積が最小となるような  $P, Q, R$  の座標を求めよ.

4  $p, q$  を自然数,  $\alpha, \beta$  を

$$\tan \alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan \beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 次の条件

$$(A) \quad \tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす  $p, q$  の組  $(p, q)$  のうち,  $q \leq 3$  であるものをすべて求めよ.

(2) 条件 (A) を満たす  $p, q$  の組  $(p, q)$  で,  $q > 3$  であるものは存在しないことを示せ.

5  $n$  を 2 以上の自然数とする. さいころを  $n$  回振り, 出た目の最大値  $M$  と最小値  $L$  の差  $M - L$  を  $X$  とする.

(1)  $X = 1$  である確率を求めよ.

(2)  $X = 5$  である確率を求めよ.

解答例

1  $f(x) = x^3 - 4x + 1$  とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$C$  上の点  $(t, f(t))$  における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 4t + 1) = (3t^2 - 4)(x - t)$$

すなわち  $y = (3t^2 - 4)x - 2t^3 + 1 \cdots (*)$

これが点  $(3, 0)$  を通るから

$$(3t^2 - 4) \cdot 3 - 2t^3 + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t + 1)(2t^2 - 11t + 11) = 0$$

$f'(-1) = -1 < 0$  であるから,  $t = -1$  は条件を満たす.

$2t^2 - 11t + 11 = 0$  のとき,  $t^2 = \frac{11}{2}(t - 1)$ ,  $t = \frac{11 \pm \sqrt{33}}{4}$  より

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 4 = 3 \cdot \frac{11}{2}(t - 1) - 4 = \frac{33}{8} \left( 4t - 4 - \frac{32}{33} \right) \\ &= \frac{33}{8} \left\{ (11 \pm \sqrt{33}) - 4 - \frac{32}{33} \right\} = \frac{33}{8} \left\{ (6 \pm \sqrt{33}) + \frac{1}{33} \right\} > 0 \end{aligned}$$

したがって, 条件を満たすのは,  $t = -1$  に限る.  $(*)$  より  $l: y = -x + 3$

$$\begin{aligned} (-x + 3) - (x^3 - 4x + 1) &= -(x^3 - 3x - 2) \\ &= -(x + 1)^2(x - 2) = (x + 1)^2(2 - x) \end{aligned}$$

$C$  と  $l$  の共有点の  $x$  座標は  $x = -1, 2$

$-1 \leq x \leq 2$  において  $(-x + 3) - (x^3 - 4x) = (x + 1)^2(2 - x) \geq 0$

よって, 求める面積  $S$  は

$$S = \int_{-1}^2 (x + 1)^2(2 - x) dx = \frac{1}{12} \{2 - (-1)\}^4 = \frac{27}{4}$$

補足 次の公式<sup>1</sup>に  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$  を代入する.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_tech.2010\\_kouki.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010_kouki.pdf) の 1 を参照.

- 2 (1) 100桁以下の自然数で、2以外の素因数を持たない数は

$$1 \leq 2^m < 10^{100} \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leq m \log_{10} 2 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq m < \frac{100}{\log_{10} 2} \quad \dots (*)$$

$$\frac{100}{0.3011} < \frac{100}{\log_{10} 2} < \frac{100}{0.3010}, \quad \frac{100}{0.3011} = 332.1\dots, \quad \frac{100}{0.3010} = 332.2\dots$$

(\*) を満たす整数は  $0 \leq m \leq 332$  よって、求める個数は **333** 個

- (2) 100桁の自然数で、2と5以外の素因数を持たない数  $N$  は

$$N = 2^p \cdot 5^q \quad (p, q \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}, 10^{99} \leq N < 10^{100})$$

- (i)  $p \geq q$  のとき、 $p = q + m$  とおくと  $N = 2^{q+m} \cdot 5^q = 2^m \cdot 10^q$

100桁以下の自然数  $2^m$  について、 $N$  が100桁の自然数となるのとき、  
(1) で求めたそれぞれの  $m$  に対して、一意に  $q$  が定まる。  
したがって、これらの個数は333個。

- (ii)  $p \leq q$  のとき、 $q = p + n$  とおくと  $N = 2^p \cdot 5^{p+n} = 5^n \cdot 10^p$

100桁以下の自然数で、5以外の素因数を持たない数は

$$1 \leq 5^n < 10^{100} \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leq n \log_{10} 5 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq n < \frac{100}{\log_{10} 5}$$

100桁以下の自然数  $5^n$  について、 $N$  が100桁の自然数となるのとき、  
それぞれの  $n$  に対して、一意に  $p$  が定まる。

$$0 \leq n < \frac{100}{\log_{10} 5} \quad \dots (**)$$

$$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 \quad \text{ゆえに} \quad 0.6989 < \log_{10} 5 < 0.6990$$

$$\frac{100}{0.6990} < \frac{100}{\log_{10} 5} < \frac{100}{0.6989}, \quad \frac{100}{0.6990} = 143.06\dots, \quad \frac{100}{0.6989} = 143.08\dots$$

(\*\*) を満たす整数は  $0 \leq n \leq 143$  これらの個数は144個。

$$p = q = 99 \text{ は (i), (ii) で重複しているから} \quad 333 + 144 - 1 = \mathbf{476} \text{ (個)}$$



**3** 原点  $O$  と点  $A(0, -1, 1)$  を通る直線  $l$  上の点  $(x, y, z)$  は、媒介変数  $s$  を用いて

$$(x, y, z) = s\overrightarrow{OA} = (0, -s, s) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$B(0, 2, 1)$ ,  $C(-2, 2, -3)$  より  $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, -4) = -2(1, 0, 2)$

2点  $B$ ,  $C$  を通る直線  $m$  上の点  $(x, y, z)$  は、媒介変数  $t$  を用いて

$$(x, y, z) = \overrightarrow{OB} + t(1, 0, 2) = (t, 2, 2t+1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  を同時に満たす  $(x, y, z)$  は存在しない。

$P(0, -p, p)$ ,  $Q(0, -q, q)$ ,  $R(r, 2, 2r+1)$  とおくと ( $p \neq q$ )

$$PQ^2 = 2(p-q)^2,$$

$$PR^2 = r^2 + (p+2)^2 + (2r+1-p)^2,$$

$$QR^2 = r^2 + (q+2)^2 + (2r+1-q)^2$$

$PR^2 - QR^2 = 0$  であるから

$$(p+2)^2 - (q+2)^2 + (2r+1-p)^2 - (2r+1-q)^2 = 0$$

$$(p+q+4)(p-q) + (4r+2-p-q)(-p+q) = 0$$

$$(p-q)(2p+2q-4r+2) = 0$$

$p \neq q$  であるから,  $r = \frac{1}{2}(p+q+1) \cdots \textcircled{3}$  より

$$PR^2 = \frac{1}{4}(p+q+1)^2 + (p+2)^2 + (q+2)^2$$

$PR^2 - PQ^2 = 0$  であるから

$$\frac{1}{4}(p+q+1)^2 + (p+2)^2 + (q+2)^2 - 2(p-q)^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

ここで  $(p+q+1)^2 = (p+q)^2 + 2(p+q) + 1$ ,

$$(p+2)^2 + (q+2)^2 = p^2 + q^2 + 4(p+q) + 8$$

$$= \frac{1}{2}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} + 4(p+q) + 8$$

これらの2式を(\*)に代入して整理すると

$$(p+q)^2 - 2(p-q)^2 + 6(p+q) + 11 = 0$$

したがって  $PQ^2 = 2(p-q)^2 = (p+q+3)^2 + 2$

正三角形  $PQR$  の面積が最小になるとき,  $PQ^2$  が最小となるから

$$p+q+3=0, \quad |p-q|=1 \quad \text{これを解いて} \quad (p, q) = (-1, -2), (-2, -1)$$

$\textcircled{3}$  より  $r = -1$  よって  $R(-1, 2, -1)$ ,  $P, Q$  は  $(0, 1, -1)$ ,  $(0, 2, -2)$

別解 O, A(0, -1, 1) より  $\vec{OA} = (0, -1, 1)$

B(0, 2, 1), C(-2, 2, -3) より  $\vec{BC} = (-2, 0, -4) = -2(1, 0, 2)$

$\vec{b} = \vec{OB}$ , 2直線  $l, m$  の方向ベクトルをそれぞれ  $\vec{u} = (0, -1, 1), \vec{v} = (1, 0, 2)$  とおく.  $l$  上の点 S を  $\vec{OS} = s\vec{u}$ ,  $m$  上の点 T を  $\vec{OT} = \vec{b} + t\vec{v}$  とすると

$$\vec{ST} = \vec{OT} - \vec{OS} = -s\vec{u} + t\vec{v} + \vec{b}$$

ST が最小となるとき,  $\vec{u} \cdot \vec{ST} = 0, \vec{v} \cdot \vec{ST} = 0$  であるから

$$\vec{u} \cdot (-s\vec{u} + t\vec{v} + \vec{b}) = 0, \quad \vec{v} \cdot (-s\vec{u} + t\vec{v} + \vec{b}) = 0$$

したがって  $s\vec{u} \cdot \vec{u} - t\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{b}, \quad s\vec{u} \cdot \vec{v} - t\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{b}$

すなわち  $2s - 2t = -1, \quad 2s - 5t = 2$  これを解いて  $s = -\frac{3}{2}, t = -1$

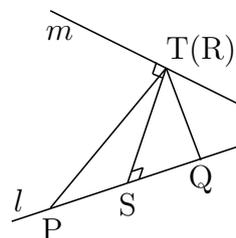
$$\vec{ST} = \frac{3}{2}\vec{u} - \vec{v} + \vec{b} = \frac{3}{2}(0, -1, 1) - (1, 0, 2) + (0, 2, 1) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$ST = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

S は P, Q の中点で, T を R にとればよい.

このとき  $SP = SQ = \frac{1}{\sqrt{3}}ST = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{2}\vec{u}$$



$\vec{OS} = -\frac{3}{2}\vec{u}$  であるから

$$\vec{OS} + \frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} = -\vec{u} = (0, 1, -1),$$

$$\vec{OS} - \frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = -2\vec{u} = (0, 2, -2)$$

よって  $R(-1, 2, -1)$ , P, Q は  $(0, 1, -1), (0, 2, -2)$  ■

4 (1)  $\tan \beta = \frac{1}{q}$  より,  $q = 1$  のとき,  $\beta = \frac{\pi}{4} + n\pi$  ( $n$  は整数) であるから

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -p \quad (p \neq 2)$$

したがって  $q \neq 1$

$$\tan \beta = \frac{1}{q} \quad (q \neq 1) \text{ より} \quad \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q^2}} = \frac{2q}{q^2 - 1}$$

正接の加法定理により

$$\tan \alpha = \tan\{(\alpha + 2\beta) - 2\beta\} = \frac{\tan(\alpha + 2\beta) - \tan 2\beta}{1 + \tan(\alpha + 2\beta) \tan 2\beta}$$

$$\text{条件により} \quad \frac{1}{p} = \frac{2 - \frac{2q}{q^2 - 1}}{1 + 2 \cdot \frac{2q}{q^2 - 1}} = \frac{2(q^2 - q - 1)}{q^2 + 4q - 1} \quad \text{ゆえに} \quad p = \frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)}$$

$$q = 2 \text{ のとき } p = \frac{11}{2}, \quad q = 3 \text{ のとき } p = 2 \quad \text{よって} \quad (p, q) = (2, 3)$$

$$(2) (1) \text{ の計算から} \quad 2p - 1 = \frac{5q}{q^2 - q - 1}$$

$2p - 1$  は正の奇数,  $q^2 - q - 1 = q(q - 2) + q - 1 > 0$  より ( $q \geq 2$ )

$$\frac{5q}{q^2 - q - 1} \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2 - 6q - 1 \leq 0$$

したがって  $|q - 3| \leq \sqrt{10}$

これを満たす自然数  $q$  は  $q = 2, 3, 4, 5, 6$

(1) の結果に注意すると,  $q = 4, 5, 6$  について調べればよい.

ここで,  $f(q) = \frac{5q}{q^2 - q - 1}$  とすると

$$f(4) = \frac{20}{11}, \quad f(5) = \frac{25}{19}, \quad f(6) = \frac{30}{29}$$

よって,  $q > 3$  であるものは存在しない. ■

- 5 (1)  $X = 1$ となるのは  $(L, M) = (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$   
 $(L, M) = (2, 1)$ であるとき,  $n$ 回とも1または2で,  $n$ 回とも1のときと  
 $n$ 回とも2のときを除くから

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

他の場合も同様であるから, 求める確率は

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- (2)  $X = 5$ となるのは  $(L, M) = (1, 6)$   
 $L = 1, M = 6$ となる事象をそれぞれ  $A, B$ とすると

$$P(A) = P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

また  $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$

ゆえに  $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} + \left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} - \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \\ &= 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

