平成 29 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

1 曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする．直線 l は C の接線であり，点 P(3, 0) を通るものとする．また，l の傾きは負であるとする．このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

2 次の問に答えよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることをは用いてよい．

(1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ．

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外に素因数を持たないものの個数を求めよ．

3 座標空間において原点 O と点 A(0, −1, 1) を通る直線を l とし，点 B(0, 2, 1) と点 C(−2, 2, −3) を通る直線を m とする．l 上の 2 点 P，Q と，m 上の点 R を △PQR が正三角形となるようにとる．このとき，△PQR の面積が最小となるような P，Q，R の座標を求めよ．

4 p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 次の条件

$$\text{(A)} \quad \tan(\alpha+2\beta)=2$$

を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ のうち，$q \leqq 3$ であるものをすべて求めよ．

(2) 条件 (A) を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ で，$q>3$ であるものは存在しないことを示せ．

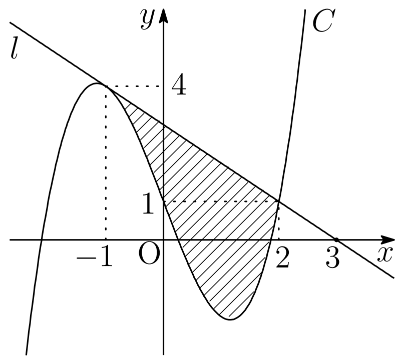
5 n を 2 以上の自然数とする．さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする．

(1) $X=1$ である確率を求めよ．

(2) $X=5$ である確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=x^3-4x+1$ とおくと



$$f'(x)=3x^2-4$$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-4t+1)=(3t^2-4)(x-t)$$

すなわち　$y=(3t^2-4)x-2t^3+1 \quad \cdots(*)$

これが点 $(3,\ 0)$ を通るから

$$(3t^2-4)\cdot 3-2t^3+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(2t^2-11t+11)=0$$

$f'(-1)=-1<0$ であるから，$t=-1$ は条件を満たす．

$2t^2-11t+11=0$ のとき，$t^2=\dfrac{11}{2}(t-1)$，$t=\dfrac{11\pm\sqrt{33}}{4}$ より

$$\begin{aligned} f'(t)=3t^2-4&=3\cdot\frac{11}{2}(t-1)-4=\frac{33}{8}\left(4t-4-\frac{32}{33}\right)\\ &=\frac{33}{8}\left\{(11\pm\sqrt{33})-4-\frac{32}{33}\right\}=\frac{33}{8}\left\{(6\pm\sqrt{33})+\frac{1}{33}\right\}>0\end{aligned}$$

したがって，条件を満たすのは，$t=-1$ に限る．$(*)$ より　$l: y=-x+3$

$$\begin{aligned}(-x+3)-(x^3-4x+1)&=-(x^3-3x-2)\\ &=-(x+1)^2(x-2)=(x+1)^2(2-x)\end{aligned}$$

C と l の共有点の x 座標は　$x=-1,\ 2$

$-1\leqq x\leqq 2$ において　$(-x+3)-(x^3-4x)=(x+1)^2(2-x)\geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}(x+1)^2(2-x)\,dx=\frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4=\boldsymbol{\frac{27}{4}}$$

補足 次の公式[1] に $m=2$，$n=1$，$\alpha=-1$，$\beta=2$ を代入する．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

2 (1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たない数は

$$1 \leqq 2^m < 10^{100} \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leqq m\log_{10}2 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq m < \frac{100}{\log_{10}2} \quad \cdots(*)$$

$$\frac{100}{0.3011} < \frac{100}{\log_{10}2} < \frac{100}{0.3010},\ \ \frac{100}{0.3011} = 332.1\cdots,\ \ \frac{100}{0.3010} = 332.2\cdots$$

$(*)$ を満たす整数は　$0 \leqq m \leqq 332$　よって，求める個数は　**333 個**

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たない数 N は

$$N = 2^p{\cdot}5^q \quad (p,\ q \text{ は } 0 \text{ 以上の整数},\ 10^{99} \leqq N < 10^{100})$$

(i) $p \geqq q$ のとき，$p = q + m$ とおくと　$N = 2^{q+m}{\cdot}5^q = 2^m{\cdot}10^q$

100 桁以下の自然数 2^m について，N が 100 桁の自然数となるのとき，
(1) で求めたそれぞれの m に対して，一意に q が定まる．
したがって，これらの個数は 333 個．

(ii) $p \leqq q$ のとき，$q = p + n$ とおくと　$N = 2^p{\cdot}5^{p+n} = 5^n{\cdot}10^p$
100 桁以下の自然数で，5 以外の素因数を持たない数は

$$1 \leqq 5^n < 10^{100} \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leqq n\log_{10}5 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq n < \frac{100}{\log_{10}5}$$

100 桁以下の自然数 5^n について，N が 100 桁の自然数となるのとき，
それぞれの n に対して，一意に p が定まる．

$$0 \leqq n < \frac{100}{\log_{10}5} \quad \cdots(**)$$

$\log_{10}5 = 1 - \log_{10}2$　ゆえに　$0.6989 < \log_{10}5 < 0.6990$

$$\frac{100}{0.6990} < \frac{100}{\log_{10}5} < \frac{100}{0.6989},\ \frac{100}{0.6990} = 143.06\cdots,\ \frac{100}{0.6989} = 143.08\cdots$$

$(**)$ を満たす整数は　$0 \leqq n \leqq 143$　これらの個数は 144 個．

$p = q = 99$ は (i)，(ii) で重複しているから　　$333 + 144 - 1 =$ **476 (個)**

3 原点Oと点A$(0,-1,\ 1)$を通る直線l上の点$(x,\ y,\ z)$は，媒介変数sを用いて

$$(x,\ y,\ z)=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,-s,\ s)\quad\cdots①$$

B$(0,\ 2,\ 1)$，C$(-2,\ 2,-3)$より　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,-4)=-2(1,\ 0,\ 2)$

2点B，Cを通る直線m上の点$(x,\ y,\ z)$は，媒介変数tを用いて

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(1,\ 0,\ 2)=(t,\ 2,\ 2t+1)\quad\cdots②$$

①，②を同時に満たす$(x,\ y,\ z)$は存在しない．

P$(0,-p,\ p)$，Q$(0,-q,\ q)$，R$(r,\ 2,\ 2r+1)$とおくと$(p\neq q)$

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=2(p-q)^2,\\ \mathrm{PR}^2&=r^2+(p+2)^2+(2r+1-p)^2,\\ \mathrm{QR}^2&=r^2+(q+2)^2+(2r+1-q)^2\end{aligned}$$

$\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2=0$であるから

$$\begin{aligned}(p+2)^2-(q+2)^2+(2r+1-p)^2-(2r+1-q)^2&=0\\ (p+q+4)(p-q)+(4r+2-p-q)(-p+q)&=0\\ (p-q)(2p+2q-4r+2)&=0\end{aligned}$$

$p\neq q$であるから，$r=\dfrac{1}{2}(p+q+1)\cdots③$より

$$\mathrm{PR}^2=\frac{1}{4}(p+q+1)^2+(p+2)^2+(q+2)^2$$

$\mathrm{PR}^2-\mathrm{PQ}^2=0$であるから

$$\frac{1}{4}(p+q+1)^2+(p+2)^2+(q+2)^2-2(p-q)^2=0\quad\cdots(*)$$

ここで

$$\begin{aligned}(p+q+1)^2&=(p+q)^2+2(p+q)+1,\\ (p+2)^2+(q+2)^2&=p^2+q^2+4(p+q)+8\\ &=\frac{1}{2}\{(p+q)^2+(p-q)^2\}+4(p+q)+8\end{aligned}$$

これらの2式を$(*)$に代入して整理すると

$$(p+q)^2-2(p-q)^2+6(p+q)+11=0$$

したがって　$\mathrm{PQ}^2=2(p-q)^2=(p+q+3)^2+2$

正三角形PQRの面積が最小になるとき，PQ^2が最小となるから

$p+q+3=0,\ \ |p-q|=1$　これを解いて　$(p,\ q)=(-1,-2),\ (-2,-1)$

③より$r=-1$　よって　R$\boldsymbol{(-1,\ 2,-1)}$，P，Qは$\boldsymbol{(0,\ 1,-1)}$，$\boldsymbol{(0,\ 2,-2)}$

別解 O，A$(0,-1,\ 1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,-1,\ 1)$

B$(0,\ 2,\ 1)$，C$(-2,\ 2,-3)$ より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,-4)=-2(1,\ 0,\ 2)$

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，2 直線 l，m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{u}=(0,-1,\ 1)$，$\vec{v}=(1,\ 0,\ 2)$ とおく．l 上の点 S を $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\vec{u}$，$m$ 上の点 T を $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\vec{b}+t\vec{v}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}=-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b}$$

ST が最小となるとき，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}=0$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}=0$ であるから

$$\vec{u}\cdot(-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b})=0,\quad \vec{v}\cdot(-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b})=0$$

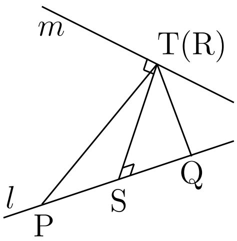
したがって $\quad s\vec{u}\cdot\vec{u}-t\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{b},\quad s\vec{u}\cdot\vec{v}-t\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{b}$

すなわち $\quad 2s-2t=-1,\ \ 2s-5t=2$ これを解いて $\quad s=-\dfrac{3}{2},\ t=-1$

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\frac{3}{2}\vec{u}-\vec{v}+\vec{b}=\frac{3}{2}(0,-1,\ 1)-(1,\ 0,\ 2)+(0,\ 2,\ 1)=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{ST}=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

S は P，Q の中点で，T を R にとればよい．



このとき $\quad \mathrm{SP}=\mathrm{SQ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ST}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{1}{2}\vec{u}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=-\dfrac{3}{2}\vec{u}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\frac{1}{2}\vec{u}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{u}=-\vec{u}=(0,\ 1,-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\frac{1}{2}\vec{u}=-\frac{3}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}=-2\vec{u}=(0,\ 2,-2)$$

よって R$\boldsymbol{(-1,\ 2,-1)}$，P，Q は $\boldsymbol{(0,\ 1,-1)}$，$\boldsymbol{(0,\ 2,-2)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ より，$q=1$ のとき，$\beta = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数) であるから

$$\tan(\alpha+2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -p\ (\neq 2)$$

したがって　$q \neq 1$

$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ $(q \neq 1)$ より　$\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{2\cdot\dfrac{1}{q}}{1-\dfrac{1}{q^2}} = \dfrac{2q}{q^2-1}$

正接の加法定理により

$$\tan\alpha = \tan\{(\alpha+2\beta)-2\beta\} = \frac{\tan(\alpha+2\beta)-\tan 2\beta}{1+\tan(\alpha+2\beta)\tan 2\beta}$$

条件により　$\dfrac{1}{p} = \dfrac{2-\dfrac{2q}{q^2-1}}{1+2\cdot\dfrac{2q}{q^2-1}} = \dfrac{2(q^2-q-1)}{q^2+4q-1}$　ゆえに　$p = \dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}$

$q=2$ のとき $p=\dfrac{11}{2}$，$q=3$ のとき $p=2$　よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = (2,\ 3)}$

(2) (1) の計算から　$2p-1 = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$

$2p-1$ は正の奇数，$q^2-q-1 = q(q-2)+q-1 > 0$ より $(q \geqq 2)$

$$\frac{5q}{q^2-q-1} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2-6q-1 \leqq 0$$

したがって　$|q-3| \leqq \sqrt{10}$

これを満たす自然数 q は　$q = 2, 3, 4, 5, 6$

(1) の結果に注意すると，$q = 4, 5, 6$ について調べればよい．

ここで，$f(q) = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$ とすると

$$f(4) = \frac{20}{11},\quad f(5) = \frac{25}{19},\quad f(6) = \frac{30}{29}$$

よって，$q > 3$ であるものは存在しない．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $X=1$ となるのは　$(L,\ M)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$

$(L,\ M)=(2,\ 1)$ であるとき，n 回とも 1 または 2 で，n 回とも 1 のときと n 回とも 2 のときを除くから

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

他の場合も同様であるから，求める確率は

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\boldsymbol{5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

(2) $X=5$ となるのは　$(L,\ M)=(1,\ 6)$

$L=1$，$M=6$ となる事象をそれぞれ A，B とすると

$$P(A)=P(B)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

また　$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n$$

ゆえに　$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\\&=\boldsymbol{1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\end{aligned}$$