平成 28 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 xy 平面内の領域

$$x^2+y^2 \leqq 2, \quad |x| \leqq 1$$

で，曲線 $C : y = x^3 + x^2 - x$ の上側にある部分の面積を求めよ．

2 ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある．「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする．この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である．1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，このボタンを最低何回押せばよいか．必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい．

3 n を 4 以上の自然数とする．数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，

$$2^{12} = 1331$$

が成り立っている．このとき n はいくつか．十進法で答えよ．

4 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る．

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

5 実数を係数とする 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し，次の条件を考える．

(イ) 方程式 $f(x) = 0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x) = 0$ の解である．

(ロ) 方程式 $f(x) = 0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ．

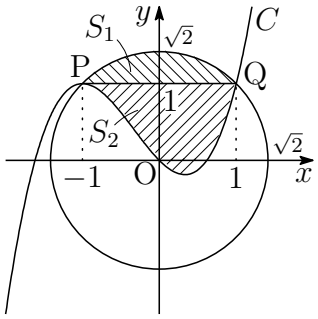
この 2 つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ．

解答例

1 $y = x^3 + x^2 - x$ を微分すると $(-1 \leqq x \leqq 1)$

$$y' = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	1



曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 2$ の交点を $\mathrm{P}(-1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1)$ とし，直線 PQ の上側で円の内部の面積を S_1，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，直線 PQ と C で囲まれた部分の面積を S_2 とする．$\angle \mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \triangle \mathrm{POQ} = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$S_2 = \int_{-1}^{1} \{1 - (x^3 + x^2 - x)\}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x+1)^2(1-x)\, dx = \frac{1}{12}\{1 - (-1)\}^4 = \frac{4}{3}$$

求める面積を S とすると　　$S = S_1 + S_2 = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}}$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta - x)^n\, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[1]．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf 1

2 「はずれ」が表示される確率を p とすると，ボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」が出る確率が 36% であるから

$$1-p^{20}=\frac{36}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^{10}=\frac{8}{10} \quad \cdots ①$$

ボタンを n 回押したとき,「あたり」の出る確率が 90% 以上となるとき

$$1-p^{n} \geqq \frac{90}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^{n} \leqq \frac{1}{10} \quad \cdots ②$$

①，② から p を消去すると

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{10}} \leqq \frac{1}{10} \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{10}{1-3\log 2} \quad \cdots ③$$

$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であるから $\quad \dfrac{967}{10000}<1-3\log 2<\dfrac{97}{1000}$

したがって $\quad \dfrac{10000}{97}<\dfrac{10}{1-3\log 2}<\dfrac{100000}{967}$

ここで $\quad \dfrac{10000}{97}=103+\dfrac{9}{97}, \quad \dfrac{100000}{967}=103+\dfrac{399}{967}$

よって，③ を満たす最小の自然数 n は $\quad$ **104** ■

3 $n \geqq 4$ より，n 進法で表記された等式 $2^{12}=1331$ が成立するから

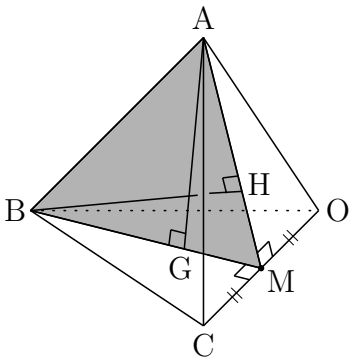
$$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{\frac{n+2}{3}}=n+1 \quad \cdots (*)$$

ここで，指数関数 $y=2^{\frac{x+2}{3}}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の交点は高々2 個.
このとき，$x+2 \equiv 0 \pmod 3$ に注意して，交点の x 座標を求めると

$$x=1,\ 7$$

よって，$(*)$ を満たす 4 以上の自然数 n は $\quad$ **7** ■

4 辺 CO の中点を M とし，△OBC，△OAC の重心をそれぞれ G，H とする．



AG は平面 OBC と垂直であるから，AG⊥CO.
BH は平面 OAC と垂直であるから，BH⊥CO.
ゆえに，CO は平面 ABM と垂直である．
したがって　$\mathrm{AC}=\mathrm{AO},\ \mathrm{BC}=\mathrm{BO}$　$\cdots(*)$
また，辺 BO の中点をとり，同様の議論を行うと，$(*)$ の B と C を交換して

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AO},\ \mathrm{CB}=\mathrm{CO}\quad\cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$\mathrm{AO}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC},\ \mathrm{OB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CO}$　$\cdots(***)$

$\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MB}},\ \overrightarrow{\mathrm{MH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MB}},\ \overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$
$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MB}},\ \overrightarrow{\mathrm{HB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2=0$$

上の 2 式から　$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$　すなわち　$\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$

したがって　$\triangle\mathrm{ACM}\equiv\triangle\mathrm{BCM}$　ゆえに　$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$

これと $(***)$ より，四面体のすべての辺の長さが等しいので，四面体 OABC は正四面体である．■

5 3 次方程式 $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ k$ とする (α を虚数，k を実数).

(i) α^3 が実数のとき　$\alpha^3=k$，$k^3=k$

α は虚数であるから，$k\neq 0$ であることに注意して　$k=\pm 1$

$k=1$ のとき　$\alpha^3=1$　ゆえに　$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 1$ であるから，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2+x+1=0$ の解である．したがって

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

$k=-1$ のとき　$\alpha^3=-1$　ゆえに　$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\alpha\neq -1$ であるから，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2-x+1=0$ の解であるから

$$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

(ii) α^3 が虚数のとき　$\alpha^3=\overline{\alpha}$，$k^3=k$

($\alpha^3=\alpha$ と仮定すると，$\alpha\neq 0$ より，$\alpha=\pm 1$ となり，不適．)

第 1 式から　$\alpha^4=\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$　ゆえに　$\alpha=\pm\sqrt{|\alpha|}\,i$

$|\alpha|^2=|\alpha|$ となるから　$|\alpha|=1$　すなわち　$\alpha=\pm i$

したがって，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2+1=0$ の解

$k^3=k$ より，$k=0,\ \pm 1$ であるから

$$f(x)=(x-k)(x^2+1)\quad (k=0,\ 1,-1)$$

(i)，(ii) より，求める $f(x)$ は

$$\boldsymbol{x^3-1,\ x^3+1,\ x^3+x,\ x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1}$$

■