平成 28 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

$\boxed{\mathbf{1}}$ xy 平面内の領域

$$x^2 + y^2 \leqq 2, \quad |x| \leqq 1$$

で，曲線 $C : y = x^3 + x^2 - x$ の上側にある部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある．「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする．この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である．1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，このボタンを最低何回押せばよいか．必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を 4 以上の自然数とする．数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，

$$2^{12} = 1331$$

が成り立っている．このとき n はいくつか．十進法で答えよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件： 頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は
対面の重心を通る．

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数を係数とする 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し，次の条件を考える．

(イ) 方程式 $f(x) = 0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x) = 0$ の解である．

(ロ) 方程式 $f(x) = 0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ．

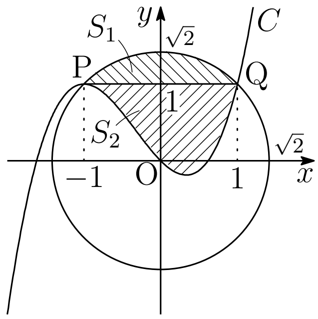
この 2 つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $y = x^3 + x^2 - x$ を微分すると $(-1 \leqq x \leqq 1)$

$$y' = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	1



曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 2$ の交点を $\mathrm{P}(-1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1)$ とし，直線 PQ の上側で円の内部の面積を S_1，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，直線 PQ と C で囲まれた部分の面積を S_2 とする．$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \triangle\mathrm{POQ} = \frac{\pi}{2} - 1, \\
S_2 &= \int_{-1}^{1} \{1 - (x^3 + x^2 - x)\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x+1)^2(1-x)\,dx = \frac{1}{12}\{1-(-1)\}^4 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

求める面積を S とすると　　$S = S_1 + S_2 = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}}$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[1]．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 「はずれ」が表示される確率を p とすると，ボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」が出る確率が 36% であるから

$$1-p^{20}=\frac{36}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^{10}=\frac{8}{10} \quad \cdots ①$$

ボタンを n 回押したとき,「あたり」の出る確率が 90% 以上となるとき

$$1-p^{n} \geqq \frac{90}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^{n} \leqq \frac{1}{10} \quad \cdots ②$$

①，② から p を消去すると

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{10}} \leqq \frac{1}{10} \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{10}{1-3\log 2} \quad \cdots ③$$

$0.3010<\log_{10}2<0.3010$ であるから $\quad \dfrac{967}{10000}<1-3\log 2<\dfrac{97}{1000}$

したがって $\quad \dfrac{10000}{97}<\dfrac{10}{1-3\log 2}<\dfrac{100000}{967}$

ここで $\quad \dfrac{10000}{97}=103+\dfrac{9}{97}，\ \dfrac{100000}{967}=103+\dfrac{399}{967}$

よって，③ を満たす最小の自然数 n は **104**

$\boxed{\mathbf{3}}$ $n \geqq 4$ より，n 進法で標記された数 2^{12} と 1331 が等しいから

$$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{\frac{n+2}{3}}=n+1 \quad \cdots (*)$$

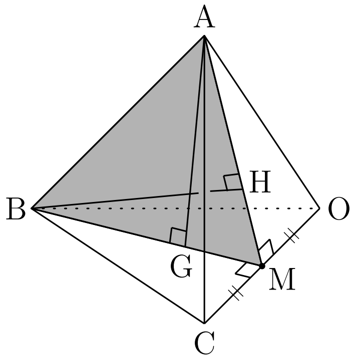
ここで，指数関数 $y=2^{\frac{x+2}{3}}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の交点は高々2 個.

このとき，$x+2\equiv 0 \pmod 3$ に注意して，交点の x 座標を求めると

$$x=1,\ 7$$

よって，$(*)$ を満たす 4 以上の自然数 n は **7**

$\boxed{\mathbf{4}}$ 辺 CO の中点を M とし，$\triangle$OBC，$\triangle$OAC の重心をそれぞれ G，H とする．
AG は平面 OBC と垂直であるから，AG$\perp$CO．
BH は平面 OAC と垂直であるから，BH$\perp$CO．
ゆえに，CO は平面 ABM と垂直である．
したがって　AC $=$ AO，BC $=$ BO　$\cdots(*)$
また，辺 BO の中点をとり，同様の議論を行うと，$(*)$ の B と C を交換して



$$\text{AB} = \text{AO},\quad \text{CB} = \text{CO} \quad \cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ より　AO $=$ AB $=$ AC，OB $=$ BC $=$ CO　$\cdots(***)$

$\overrightarrow{\text{MG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{MB}}$，$\overrightarrow{\text{MH}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{MA}}$ より　$\overrightarrow{\text{GA}} = \overrightarrow{\text{MA}} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{MB}}$，$\overrightarrow{\text{HB}} = \overrightarrow{\text{MB}} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{MA}}$

$\overrightarrow{\text{GA}}\perp\overrightarrow{\text{MB}}$，$\overrightarrow{\text{HB}}\perp\overrightarrow{\text{MA}}$ であるから，$\overrightarrow{\text{GA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}} = 0$，$\overrightarrow{\text{HB}}\cdot\overrightarrow{\text{MA}} = 0$ より

$$\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{\text{MB}}|^2 = 0,\quad \overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{MB}} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{\text{MA}}|^2 = 0$$

上の 2 式から　$|\overrightarrow{\text{MA}}|^2 = |\overrightarrow{\text{MB}}|^2$　すなわち　MA $=$ MB

したがって　$\triangle$ACM $\equiv$ $\triangle$BCM　ゆえに　AC $=$ BC

これと $(***)$ より，四面体のすべての辺の長さが等しいので，四面体 OABC は正四面体である．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 3 次方程式 $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ k$ とする (α を虚数，k を実数).

(i) α^3 が実数のとき　$\alpha^3=k$，$k^3=k$

α は虚数であるから，$k \neq 0$ であることに注意して　$k=\pm 1$

$k=1$ のとき　$\alpha^3=1$　ゆえに　$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha \neq 1$ であるから，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

$k=-1$ のとき　$\alpha^3=-1$　ゆえに　$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\alpha \neq -1$ であるから，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2-x+1=0$ の解であるから

$$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

(ii) α^3 が虚数のとき　$\alpha^3=\overline{\alpha}$，$k^3=k$

第 1 式から　$\alpha^4=\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$　ゆえに　$\alpha=\pm\sqrt{|\alpha|}\,i$

$|\alpha|^2=|\alpha|$ となるから　$|\alpha|=1$　すなわち　$\alpha=\pm i$

したがって，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2+1=0$ の解

$k^3=k$ より，$k=0,\ \pm 1$ であるから

$$f(x)=(x-k)(x^2+1)\quad (k=0,\ 1, -1)$$

(i)，(ii) より，求める $f(x)$ は

$$\boldsymbol{x^3-1,\ x^3+1,\ x^3+x,\ x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1}$$