

平成27年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分
総合人間(文系), 文, 教育(文系), 法, 経済(文系)

問題 1 2 3 4 5

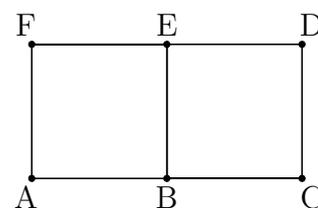
1 直線 $y = px + q$ が, $y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが, $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような (p, q) の範囲を図示し, その面積を求めよ.

2 次の2つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものを求めよ.

(a) 少なくとも2つの内角は 90° である.

(b) 半径1の円が内接する. ただし, 円が四角形に内接するとは, 円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう.

3 6個の点 A, B, C, D, E, F が右図のように長さ1の線分で結ばれているとする. 各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る. 赤く塗られた線分だけを通して点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のもの長さを X とする. そのような経路がない場合は X を0とする. このとき, $n = 0, 2, 4$ について, $X = n$ となる確率を求めよ.



4 xyz 空間の中で, $(0, 0, 1)$ を中心とする半径1の球面 S を考える. 点 Q が $(0, 0, 2)$ 以外の S 上の点を動くとき, 点 Q と点 $P(1, 0, 2)$ の2点を通る直線 ℓ と平面 $z = 0$ との交点を R とおく. R の動く範囲を求め, 図示せよ.

5 a, b, c, d, e を正の有理数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(x) = dx + e$$

を考える. すべての正の整数 n に対して $\frac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする. このとき, $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ.

解答例

1 $y = px + q$ と $y = x^2 - x$ から y を消去すると

$$px + q = x^2 - x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - (p+1)x - q = 0$$

判別式を D とすると, このとき, $D \geq 0$ であるから

$$(p+1)^2 + 4q \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

$y = |x| + |x-1| + 1$ は

$$y = \begin{cases} -2x + 2 & (x < 0) \\ 2 & (0 \leq x < 1) \\ 2x & (1 \leq x) \end{cases}$$

$f(x) = px + q$ とおくと, 直線 $y = f(x)$ が上のグラフと共有点を持たないとき, 傾き p に注意して

$$-2 \leq p \leq 2$$

上のグラフから, $f(0) < 2$, $f(1) < 2$ であるから

$$q < 2, \quad p + q < 2$$

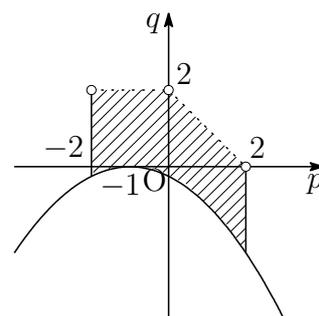
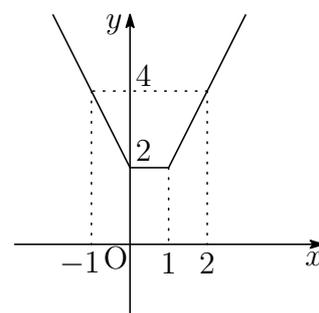
したがって, (p, q) の満たす領域は

$$-2 \leq p \leq 2, \quad q < 2, \quad q < -p + 2, \quad q \geq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

右の図の斜線分で, 点線および \circ は除く.

よって, 求める面積を S とすると

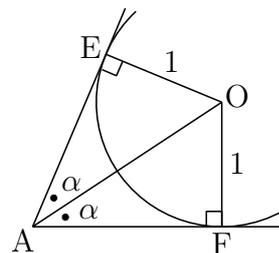
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2+4) \cdot 2 + \int_{-2}^2 \frac{1}{4}(p+1)^2 dp \\ &= 6 + \left[\frac{1}{12}(p+1)^3 \right]_{-2}^2 = 6 + \frac{1}{12}(3^3 + 1) = \frac{25}{3} \end{aligned}$$



2 右の図の四角形 OEAF について

$$AE = AF = \frac{1}{\tan \alpha}$$

四角形 OEAF の面積は $\frac{1}{\tan \alpha}$



条件 (a), (b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを 2α , 2β , 2γ , 2δ とし, その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} + \frac{1}{\tan \delta} \quad \dots (*)$$

一般性を失うことなく $2\gamma = 2\delta = 90^\circ$, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

上の 2 式から $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\gamma = \delta = 45^\circ$

これらを (*) に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} + \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{\tan 45^\circ} \\ &= \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} + 2 = \frac{(\tan \alpha - 1)^2}{\tan \alpha} + 4 \geq 4 \end{aligned}$$

よって, S は $\alpha = 45^\circ$, すなわち, 四角形 ABCD が正方形のとき, 最小値 4

3 $X = 2$ となるのは, $A \rightarrow B \rightarrow E$ または $A \rightarrow F \rightarrow E$ の経路があるときで, それぞれの事象を R , S とすると

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$, $B \rightarrow E$ の経路がある事象をそれぞれ Y , Z とすると

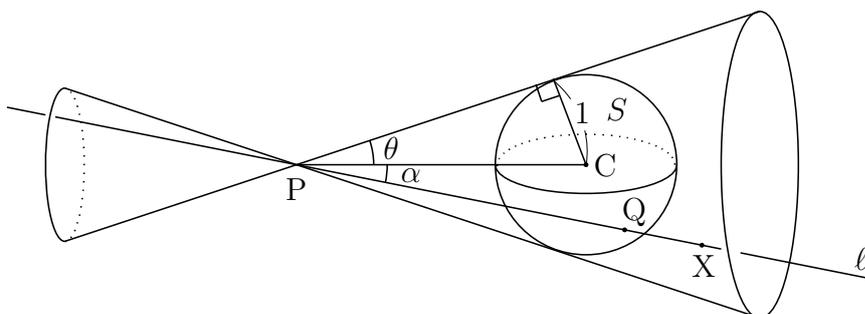
$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P(Y \cap \bar{Z} \cap \bar{S}) = P(Y)P(\bar{Z})P(\bar{S}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \frac{3}{128} \end{aligned}$$

$P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - P(X = 2) - P(X = 4) \\ &= 1 - \frac{7}{16} - \frac{3}{128} = \frac{69}{128} \end{aligned}$$

- 4 球面 S の中心 $(0, 0, 1)$ を C とし, S に接する P を頂点とする円錐面の母線と PC のなす角を θ とする. 直線 ℓ 上の点を $X(x, y, z)$ とし, PC と PX のなす角を α とすると

$$0 \leq \alpha \leq \theta, \quad \pi - \theta \leq \alpha \leq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \alpha \geq \cos^2 \theta$$



$$P(1, 0, 2), C(0, 0, 1) \text{ より } PC = \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\vec{PC} = (-1, 0, -1), \quad \vec{PX} = (x-1, y, z-2), \quad \frac{\vec{PC} \cdot \vec{PX}}{|\vec{PC}| |\vec{PX}|} = \cos \alpha \text{ より}$$

$$\frac{3-x-z}{\sqrt{2} \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2}} = \cos \alpha$$

$$\text{したがって} \quad \frac{(3-x-z)^2}{2\{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2\}} = \cos^2 \alpha \geq \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

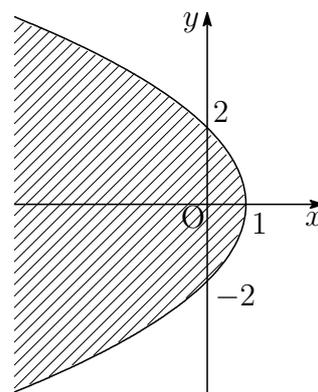
$$\text{ゆえに} \quad (3-x-z)^2 - \{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2\} \geq 0$$

この図形の xy 平面 ($z=0$) 上の領域は

$$(3-x)^2 - \{(x-1)^2 + y^2 + (-2)^2\} \geq 0$$

$$\text{よって} \quad x \leq -\frac{1}{4}y^2 + 1$$

R の動く範囲は, 右の図の斜線部分で, 境界を含む.



別解 R(X, Y, 0) とおくと, Q は直線 PR 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= t\overrightarrow{OR} + (1-t)\overrightarrow{OP} \\ &= t(X, Y, 0) + (1-t)(1, 0, 2) \\ &= (tx + 1 - t, tY, 2 - 2t)\end{aligned}$$

また, Q は球面 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ 上の点であるから

$$\begin{aligned}\{t(X - 1) + 1\}^2 + (tY)^2 + (1 - 2t)^2 &= 1 \\ \{(X - 1)^2 + Y^2 + 4\}t^2 + 2(X - 3)t + 1 &= 0\end{aligned}$$

$t \neq 0$, $(X - 1)^2 + Y^2 + 4 \neq 0$ に注意して, 上式の t に関する係数について

$$(X - 3)^2 - \{(X - 1)^2 + Y^2 + 4\} \cdot 1 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad X \leq -\frac{1}{4}Y^2 + 1$$

よって, R の動く範囲は $x \leq -\frac{1}{4}y^2 + 1$ ■

5 $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px + q$, 余りを $r \neq 0$ (p, q, r は有理数) とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px + q + \frac{r}{g(x)}, \quad p = \frac{a}{d} > 0$$

したがって $\frac{f(n)}{g(n)} = pn + q + \frac{r}{g(n)}$

$p = \frac{A}{B}, q = \frac{C}{D}$ とおくと (A, B, C, D は整数)

$$\left| BD \cdot \frac{f(n)}{g(n)} - ADn - BC \right| = \left| \frac{rBD}{g(n)} \right| \quad \dots (*)$$

$d > 0$ より, $g(n) = dn + e$ は十分大きな n に対し,

$$0 < \left| \frac{rBD}{g(n)} \right| < 1$$

となり, (*) の左辺が整数であることに反する.

よって, $r = 0$ となり, $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる. ■