平成27年度　京都大学　2次試験前期日程(数学問題)120分
総合人間(文系)，文，教育(文系)，法，経済(文系)

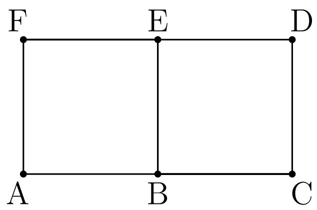
1 直線 $y = px + q$ が，$y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが，$y = |x| + |x-1| + 1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ．

2 次の2つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものを求めよ．

(a) 少なくとも2つの内角は 90° である．

(b) 半径1の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう．

3 6個の点A，B，C，D，E，Fが右図のように長さ1の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率 $\dfrac{1}{2}$ で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点Aから点Eに至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする．そのような経路がない場合は X を0とする．このとき，$n = 0, 2, 4$ について，$X = n$ となる確率を求めよ．



4 xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径1の球面 S を考える．点Qが $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点Qと点P$(1,\ 0,\ 2)$ の2点を通る直線 ℓ と平面 $z = 0$ との交点をRとおく．Rの動く範囲を求め，図示せよ．

5 a，b，c，d，e を正の有理数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = dx + e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

解答例

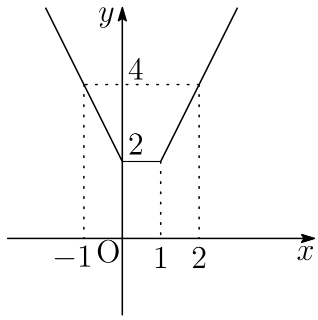
$\boxed{\mathbf{1}}$ $y=px+q$ と $y=x^2-x$ から y を消去すると

$$px+q=x^2-x \quad ゆえに \quad x^2-(p+1)x-q=0$$

判別式を D とすると，このとき，$D \geqq 0$ であるから

$$(p+1)^2+4q \geqq 0 \quad ゆえに \quad q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

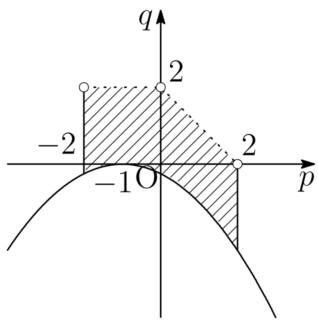
$y=|x|+|x-1|+1$ は



$$y=\begin{cases} -2x+2 & (x<0) \\ 2 & (0 \leqq x<1) \\ 2x & (1 \leqq x) \end{cases}$$

$f(x)=px+q$ とおくと，直線 $y=f(x)$ が上のグラフと共有点を持たないとき，傾き p に注意して

$$-2 \leqq p \leqq 2$$



上のグラフから，$f(0)<2$，$f(1)<2$ であるから

$$q<2, \quad p+q<2$$

したがって，$(p,\ q)$ の満たす領域は

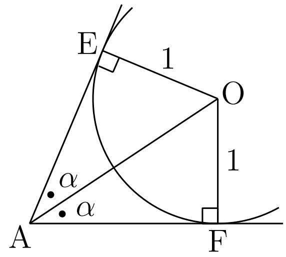
$$-2 \leqq p \leqq 2,\ q<2,\ q<-p+2,\ q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

右の図の斜線分で，点線および ∘ は除く．

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2+4)\cdot 2+\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}(p+1)^2\,dp \\ &= 6+\left[\,\frac{1}{12}(p+1)^3\,\right]_{-2}^{2}=6+\frac{1}{12}(3^3+1)=\mathbf{\frac{25}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 右の図の四角形 OEAF について



$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

四角形 OEAF の面積は　$\dfrac{1}{\tan\alpha}$

条件 (a)，(b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを 2α，2β，2γ，2δ とし，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\delta} \quad \cdots (*)$$

一般性を失うことなく　$2\gamma = 2\delta = 90^\circ$，$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

上の 2 式から　$\beta = 90^\circ - \alpha$，$\gamma = \delta = 45^\circ$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} + \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{\tan 45^\circ} \\ &= \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} + 2 = \frac{(\tan\alpha - 1)^2}{\tan\alpha} + 4 \geqq 4 \end{aligned}$$

よって，S は $\alpha = 45^\circ$，すなわち，四角形 ABCD が正方形のとき，最小値　**4**

$\boxed{\mathbf{3}}$ $X = 2$ となるのは，A → B → E または A → F → E の経路があるときで，それぞれの事象を R，S とすると

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \boldsymbol{\frac{7}{16}} \end{aligned}$$

A → B → C → D → E，B → E の経路がある事象をそれぞれ Y，Z とすると

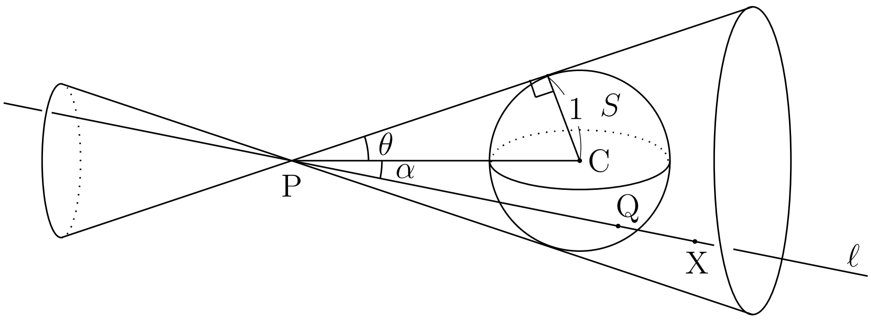
$$\begin{aligned} P(X=4) &= P(Y \cap \overline{Z} \cap \overline{S}) = P(Y)P(\overline{Z})P(\overline{S}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \boldsymbol{\frac{3}{128}} \end{aligned}$$

$P(X=0) + P(X=2) + P(X=4) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1 - P(X=2) - P(X=4) \\ &= 1 - \frac{7}{16} - \frac{3}{128} = \boldsymbol{\frac{69}{128}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 球面 S の中心 $(0,\ 0,\ 1)$ を C とし，S に接する P を頂点とする円錐面の母線と PC のなす角を θ とする．直線 ℓ 上の点を $\mathrm{X}(x,\ y,\ z)$ とし，PC と PX のなす角を α とすると

$$0 \leqq \alpha \leqq \theta, \quad \pi - \theta \leqq \alpha \leqq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\alpha \geqq \cos^2\theta$$



$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ より　$\mathrm{PC} = \sqrt{2}$　ゆえに　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (-1,\ 0, -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PX}} = (x-1,\ y,\ z-2)$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PX}}|} = \cos\alpha$ より

$$\frac{3-x-z}{\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2}} = \cos\alpha$$

したがって　$$\frac{(3-x-z)^2}{2\{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2\}} = \cos^2\alpha \geqq \cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

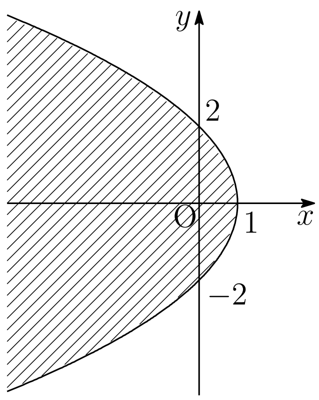
ゆえに　$$(3-x-z)^2 - \{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2\} \geqq 0$$

この図形の xy 平面 $(z=0)$ 上の領域は

$$(3-x)^2 - \{(x-1)^2+y^2+(-2)^2\} \geqq 0$$

よって　$\boldsymbol{x \leqq -\dfrac{1}{4}y^2 + 1}$

R の動く範囲は，右の図の斜線部分で，境界を含む．



別解 R$(X,\ Y,\ 0)$ とおくと，Q は直線 PR 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OR}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= t(X,\ Y,\ 0) + (1-t)(1,\ 0,\ 2)\\ &= (tx+1-t,\ tY,\ 2-2t)\end{aligned}$$

また，Q は球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 上の点であるから

$$\{t(X-1)+1\}^2+(tY)^2+(1-2t)^2=1$$
$$\{(X-1)^2+Y^2+4\}t^2+2(X-3)t+1=0$$

$t \neq 0$，$(X-1)^2+Y^2+4 \neq 0$ に注意して，上式の t に関する係数について

$$(X-3)^2-\{(X-1)^2+Y^2+4\}\cdot 1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad X \leqq -\frac{1}{4}Y^2+1$$

よって，R の動く範囲は　　$x \leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px+q$，余りを $r \neq 0$ (p，q，r は有理数) とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px+q+\frac{r}{g(x)}, \quad p=\frac{a}{d}>0$$

したがって　　$\dfrac{f(n)}{g(n)} = pn+q+\dfrac{r}{g(n)}$

$p=\dfrac{A}{B}$，$q=\dfrac{C}{D}$ とおくと ($A,\ B,\ C,\ D$ は整数)

$$\left|BD\cdot\frac{f(n)}{g(n)}-ADn-BC\right| = \left|\frac{rBD}{g(n)}\right| \quad \cdots(*)$$

$d>0$ より，$g(n)=dn+e$ は十分大きな n に対し，

$$0<\left|\frac{rBD}{g(n)}\right|<1$$

となり，$(*)$ の左辺が整数であることに反する．

よって，$r=0$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる．