平成 26 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

1 $0° \leqq \theta < 90°$ とする．x についての 4 次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos\theta)x - \cos\theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan\theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ．

2 t を実数とする．$y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く．

(1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ．

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ．

3 座標空間における次の 3 つの直線 l，m，n を考える．

l は点 $\mathrm{A}(1,\ 0, -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u} = (2,\ 1, -1)$ に平行な直線である．
m は点 $\mathrm{B}(1,\ 2, -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v} = (1, -1,\ 1)$ に平行な直線である．
n は点 $\mathrm{C}(1, -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w} = (1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m，n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PR}^2$ を求めよ，

4 次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 次の不等式

$$a_n{}^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

5 1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり，それぞれの目が出る確率は等しいものとする．A，B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ，大きな目を出した方はその目を得点とし，小さな目を出した方は得点を 0 とする．また同じ目が出た場合は，A，B ともに得点を 0 とする．このとき，A の得点の期待値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ 2 つの 2 次方程式

$$x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0,\quad x^2+2(\tan\theta)x+3=0$$

の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$$\begin{aligned}D_1/4&=\cos^2\theta+\cos\theta-1\\&=\left(\cos\theta-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos\theta-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\\D_2/4&=\tan^2\theta-3\\&=(\tan\theta+\sqrt{3})(\tan\theta-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$2<\sqrt{5}<3$ より $\dfrac{1}{2}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$ であるから，α を次のように定める．

$$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad(0^\circ<\alpha<60^\circ)$$

したがって，D_1，D_2 の符号は次のようになる．

θ	0°	$\cdots$	α	$\cdots$	60°	$\cdots$	(90°)
D_1	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
D_2	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

$0^\circ\leqq\theta<90^\circ$ において，D_1，D_2 の少なくとも一方が負であるから，与えられた 4 次方程式は，虚数解を少なくとも 1 つ持つ． ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C : y = x^3 - x$ より　$y' = 3x^2 - 1$

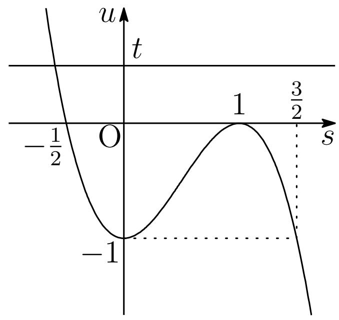
C 上の点 $\mathrm{A}(s,\ s^3 - s)$ における接線の方程式は

$$y - (s^3 - s) = (3s^2 - 1)(x - s) \quad \text{すなわち} \quad y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$$

この接線が点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ を通るとき　$t = -2s^3 + 3s^2 - 1 \quad \cdots (*)$

$f(s) = -2s^3 + 3s^2 - 1$ とおくと

$$f'(s) = -6s^2 + 6s = -6s(s - 1)$$



$f(s)$ の増減表は次のようになる．

s	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$\cdots$
$f(s)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$

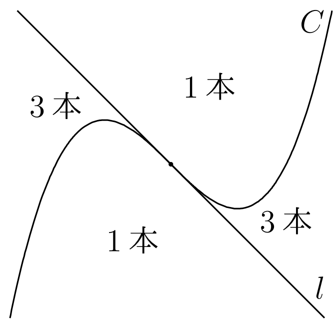
実数 t に対し，方程式 $(*)$ の実数解 s がただ 1 つだけであるとき，$u = f(s)$ のグラフと直線 $u = t$ の共有点がただ 1 つである．

よって，求める t の値の範囲は　$\boldsymbol{t < -1,\ 0 < t}$

補足 3 次関数のグラフ C 上の変曲点 $(y'' = 0)$ における接線 l とそのグラフにより，P から引ける接線の本数は右の図のようになる．P が変曲点を除く C および l 上にあるとき 2 本，変曲点では l のみの 1 本である．

本題では，変曲点 $(0, 0)$，$l : y = -x$．

直線 $x = 1$ と C および l の共有点は，それぞれ $(1,\ 0)$，$(1, -1)$



(2) $C : y = x^3 - x$ と C 上の点 $\mathrm{A}(s,\ s^3 - s)$ における接線 $y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$ の方程式より

$$x^3 - x - \{(3s^2 - 1)x - 2s^3\} = (x - s)^2(x + 2s)$$

点 A 以外の共有点の x 座標は $-2s$ であるから，求める面積 $S(t)$ は [1]

$$S(t) = \frac{1}{12}\{s - (-2s)\}^4 = \frac{27}{4}s^4$$

(1) で示したグラフから，$t < -1,\ 0 < t$ のとき　$s < -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2} < s$

したがって　$s^4 > \dfrac{1}{16}$　よって　$\boldsymbol{S(t) > \dfrac{27}{64}}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，実数 r，s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+r\vec{u},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{b}+s\vec{v},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{c}+t\vec{w}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{b}-\vec{a}+s\vec{v}-r\vec{u}$，　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\vec{c}-\vec{a}+t\vec{w}-r\vec{u}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\perp\vec{w}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\vec{w}=0$ であるから

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{v}+s|\vec{v}|^2-r\vec{u}\cdot\vec{v}=0,\quad (\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{w}+t|\vec{w}|^2-r\vec{u}\cdot\vec{w}=0$$

ここで　$\vec{b}-\vec{a}=(0,\ 2,-1)$，　$\vec{c}-\vec{a}=(0,-1,\ 2)$，

$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{v}=-3$，　$(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{w}=0$，

$|\vec{v}|^2=3$，　$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，　$|\vec{w}|^2=6$，　$\vec{u}\cdot\vec{w}=3$

したがって　$-3+3s=0$，$6t-3r=0$　ゆえに　$s=1$，$r=2t$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(\vec{b}-\vec{a})+\vec{v}-2t\vec{u}\\
&=(0,\ 2,-1)+(1,-1,\ 1)-2t(2,\ 1,-1)\\
&=(1-4t,\ 1-2t,\ 2t),\\
\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\vec{c}-\vec{a}+t\vec{w}-2t\vec{u}\\
&=(0,-1,\ 2)+t(1,\ 2,\ 1)-2t(2,\ 1,-1)\\
&=(-3t,-1,\ 2+3t),\\
\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\\
&=(1-4t)^2+(1-2t)^2+(2t)^2+(-3t)^2+(-1)^2+(2+3t)^2\\
&=42t^2+7
\end{aligned}$$

$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ は，$t=0$ のとき**最小値 7** をとる．

このとき，$r=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$，すなわち，$\mathbf{P(1,0,-2)}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $a_{n+1} = 2a_n - 1$ より　$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

数列 $\{a_n - 1\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$a_n - 1 = 2^{n-1}(a_1 - 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a_n = 1 + 2^{n-1}}$$

(2) ${a_n}^2 - 2a_n > 10^{15}$ より　$(a_n - 1)^2 > 10^{15} + 1$

これに (1) の結果を代入すると　$2^{2n-2} > 10^{15} + 1$

上式おいて $n > 1$ であるから，上式の左辺は偶数，右辺は奇数により

$$2^{2n-2} > 10^{15} \quad \cdots (*)$$

を満たす最小の自然数を求めればよい．

$(*)$ の両辺の常用対数をとると

$$(2n-2)\log_{10} 2 > 15 \quad \text{ゆえに} \quad n > 1 + \frac{15}{2\log_{10} 2} \quad \cdots (**)$$

ここで，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より

$$\frac{15}{2 \times 0.3011} < \frac{15}{2\log_{10} 2} < \frac{15}{2 \times 0.3010}$$

ゆえに　$24.90 < \dfrac{15}{2\log_{10} 2} < 24.91$

したがって　$25.90 < 1 + \dfrac{15}{2\log_{10} 2} < 25.91$

$(**)$ より，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 26}$

補足 $0.3010=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{100}=\dfrac{3}{10}\left(1+\dfrac{1}{30}\right)$，$0.3011=\dfrac{3}{10}+\dfrac{11}{1000}=\dfrac{3}{10}\left(1+\dfrac{11}{300}\right)$

$\log_{10}2=\dfrac{3}{10}(1+\varepsilon)$ とおくと，$\dfrac{1}{30}<\varepsilon<\dfrac{11}{300}$ であるから

$$1-\varepsilon<\frac{1}{1+\varepsilon}<1 \quad \text{ゆえに} \quad 25-25\varepsilon<\frac{15}{2\log_{10}2}<25$$

$\dfrac{5}{6}<25\varepsilon<\dfrac{11}{12}$ であるから　　$25<1+\dfrac{15}{2\log_{10}2}<26$

なお，$1-\varepsilon<\dfrac{1}{1+\varepsilon}<1$ の精度を順次高めると

$$\begin{aligned}
1-\varepsilon &< \frac{1}{1+\varepsilon} < 1-\varepsilon+\varepsilon^2\\
1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3 &< \frac{1}{1+\varepsilon} < 1-\varepsilon+\varepsilon^2\\
1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3 &< \frac{1}{1+\varepsilon} < 1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\varepsilon^4\\
&\vdots
\end{aligned}$$

■

5 A の得点が k で，B の得点が $k-1$ 以下である確率を $P(k)$ とすると

$$P(k)=\frac{1}{20}\cdot\frac{k-1}{20}=\frac{k-1}{20^2} \quad (2\leqq k\leqq 20)$$

求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{k=2}^{20}k\cdot P(k)=\frac{1}{20^2}\sum_{k=2}^{20}k(k-1)=\frac{1}{20^2}\sum_{k=1}^{20}(k^2-k)\\
&= \frac{1}{20^2}\left(\frac{1}{6}\cdot20\cdot21\cdot41-\frac{1}{2}\cdot20\cdot21\right)\\
&= \frac{21}{20}\left(\frac{41}{6}-\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{20}\cdot\frac{19}{3}=\boldsymbol{\frac{133}{20}}
\end{aligned}$$

■