平成 25 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 a を 2 以上の実数とし，$f(x) = (x+a)(x+2)$ とする．このとき $f(f(x)) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ．

2 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ．

3 n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする．

(1) a と b は整数であることを示せ．

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

4 α，β を実数とする．xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線

$$y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$$

が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している．このとき以下の問に答えよ．

(1) α，β の値を求めよ．

(2) 円 C，放物線 $y = -\dfrac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

5 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

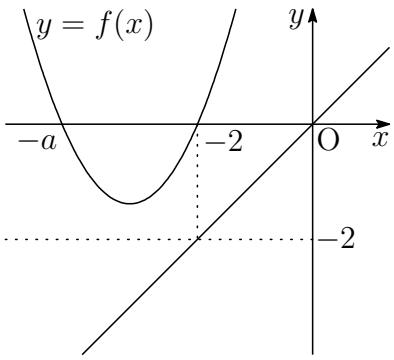
(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ．

解答例

1 (i) 関数 $f(x)$ の最小値が -2 以下であるとき，
$f(c)=-2$ を満たす実数 c が存在するから　$f(f(c))=f(-2)=0$
これは条件に反する．

(ii) 関数 $f(x)$ の最小値が -2 より大きいとき，
すべての実数 x に対して，$f(x)>-2$ であるから　$f(f(x))>0$
これは条件を満たす．

(i),(ii) より，$f(x)$ の最小値が -2 より大きい，
すなわち，$f(x)=-2$ は実数解をもたない．



$$(x+a)(x+2)=-2$$

整理すると

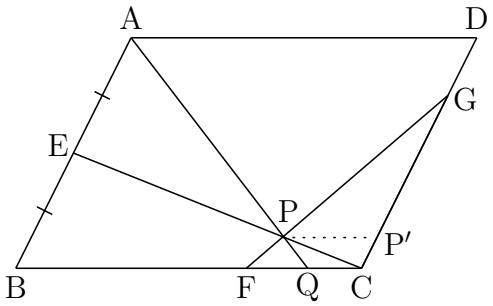
$$x^2+(a+2)x+2a+2=0$$

したがって，係数について

$$(a+2)^2-4\cdot1(2a+2)<0$$

$a\geqq 2$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{2\leqq a<2+2\sqrt{2}}$ ■

2 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CE}}&=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}\\&=3\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{CG}}\\&=\frac{11}{3}\left(\frac{9}{11}\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\frac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{CG}}\right)\end{aligned}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{9}{11}\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\dfrac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{CG}}$

$$=\frac{9}{11}\cdot\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{4}\vec{d}=\frac{3}{11}\vec{b}+\frac{3}{22}\vec{d}$$

点 P を通り，BC に平行な直線と辺 CD との交点を P′ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP'}}=\frac{3}{22}\vec{d}\quad\text{ゆえに}\quad \mathrm{DP'}=\mathrm{P'C}=19:3$$

よって　$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=\mathrm{DP'}:\mathrm{P'C}=\mathbf{19:3}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{11}{3}\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ であるから，2 直線 AD，CE の交点を A′ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{22}{3}\overrightarrow{\mathrm{CP}}\quad\text{ゆえに}\quad \mathrm{A'P}:\mathrm{PC}=19:3$$

よって　$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=\mathrm{A'P}:\mathrm{PC}=19:3$

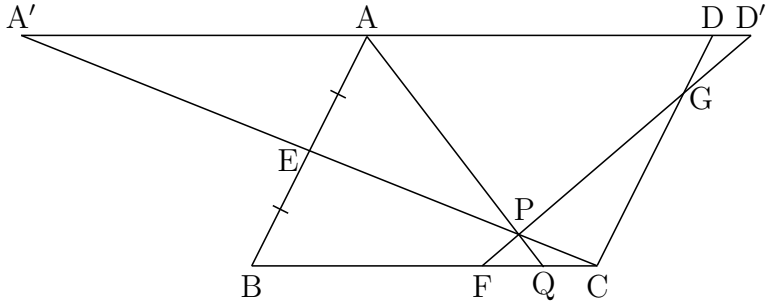
別解 2 直線 AD，CE の交点を A′ とし，2 直線 AD，FG の交点を D′ とする．

△GDD′ ∽ △GCF，GD : GC = 1 : 3 より　DD′ : CF = 1 : 3

また，CF : AD = 1 : 3 より　DD′ : AD = 1 : 9

A′A = AD であるから　DD′ : A′D′ = 1 : 19　ゆえに　A′D′ : CF = 19 : 3

△PA′D′ ∽ △PCF であるから　AP : PQ = 19 : 3



3 (1) x^n を $(x-k)(x-k-1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$x^n = (x-k)(x-k-1)Q(x) + ax + b$$

上式に $x = k,\ k+1$ を代入すると

$$\begin{cases} k^n = ak + b & \cdots ① \\ (k+1)^n = a(k+1) + b & \cdots ② \end{cases}$$

② − ① より　　$a = (k+1)^n - k^n$

これを ① に代入すると　$k^n = \{(k+1)^n - k^n\}k + b$

したがって　　$b = (k+1)k^n - k(k+1)^n$

k は自然数であるから，a，b は整数である．

(2) $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$ を満たす素数 p が存在すると仮定すると，①，② より

$$k^n \equiv 0, \quad (k+1)^n \equiv 0 \qquad \text{ゆえに} \quad k \equiv 0, \quad k+1 \equiv 0 \pmod{p}$$

このとき，$1 \equiv 0 \pmod{p}$ となり，矛盾を生じる．
よって，a と b をともに割り切る素数 p は存在しない．　■

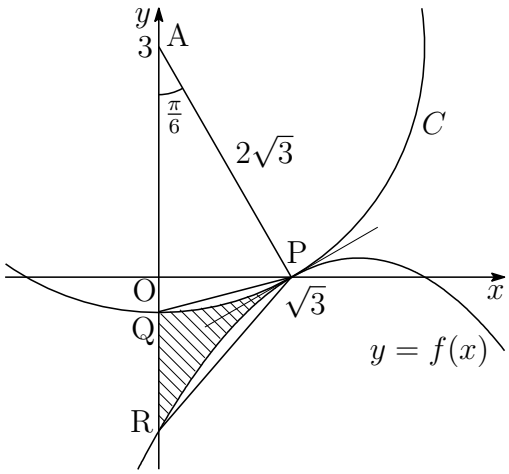
4 (1) $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ とすると　$f'(x) = -\dfrac{2}{3}x + \alpha$

条件により，$f(\sqrt{3}) = 0$，$f'(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$-1 + \sqrt{3}\alpha - \beta = 0, \quad -\frac{2}{3}\sqrt{3} + \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{\alpha = \sqrt{3},\ \beta = 2}$

(2) 点 $(0,\ \sqrt{3})$ を A とし，円 C，放物線 $y = f(x)$ の y 軸との交点をそれぞれ Q，R とすると



$$\mathrm{AP} = 2\sqrt{3}, \quad \angle\mathrm{PAQ} = \frac{\pi}{6}$$

$$\mathrm{Q}(0,\ 3 - 2\sqrt{3}), \quad \mathrm{R}(0, -2)$$

$\mathrm{OP} = \sqrt{3}$，$\mathrm{QR} = 5 - 2\sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{OP} \\ &= \frac{1}{2}(5 - 2\sqrt{3})\sqrt{3} \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{3} - 3\end{aligned}$$

線分 PQ と円 C で囲まれた A を含まない方の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\left(\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \pi - 3$$

線分 PR と放物線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

求める面積を S とすると

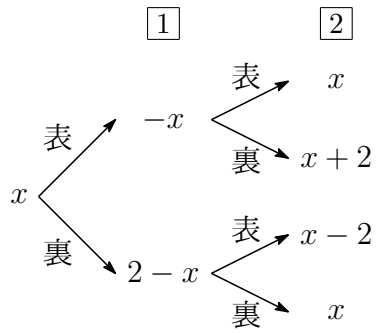
$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{PQR} - S_1 - S_2 \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{3} - 3 - (\pi - 3) - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{3}\sqrt{3} - \pi}\end{aligned}$$

■

5 (1) 座標 x にあるとき，硬貨の表と裏により，それぞれ $-x$ と $2-x$ に移動するので

$$f(x) = -x, \quad g(x) = 2 - x$$

とおくと，2 回の試行による石の座標は次のようになる．



表表のとき　$f(f(x)) = x$
表裏のとき　$g(f(x)) = x + 2$
裏表のとき　$f(g(x)) = x - 2$
裏裏のとき　$g(g(x)) = x$

よって，求める確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から，2 回硬貨を投げる試行を T とすると，この試行により，石の座標の増減が $+2$，0，-2 となる 3 つの事象があり，それぞれの確率は $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ である．硬貨を $2n$ 回投げる，すなわち，試行 T を n 回行ったとき，石の座標が $2n$ だけ増加するのは，

$$+2 \times n = 2n$$

これにより，増減が $+2$ である事象が n 回である．よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n = \mathbf{\frac{1}{2^{2n}}}$$

■