平成 24 年度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

1 次の各問に答えよ．

(1) 2 つの曲線 $y = x^4$ と $y = x^2 + 2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) n を 3 以上の整数とする．1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある．これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする．$X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ．ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする．

2 正四面体 OABC において，点 P，Q，R をそれぞれ辺 OA，OB，OC 上にとる．ただし P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする．△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行であることを証明せよ．

3 実数 x，y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ．

4 次の命題 (p)，(q) のそれぞれについて，正しいかどうかを答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ．

(p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である．

(q) △ABC と △A′B′C′ において，AB = A′B′，BC = B′C′，∠A = ∠A′ ならば，これらの 2 つの三角形は合同である．

5 次の条件 $(*)$ を満たす正の実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

$(*)$ $\cos a\theta = \cos b\theta$ かつ $0 < \theta \leqq \pi$ となる θ がちょうど 1 つある．

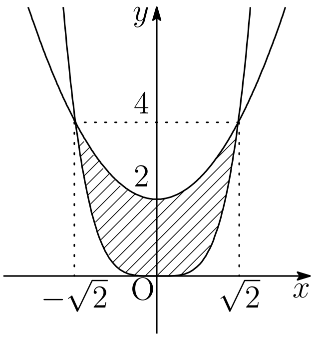
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=x^4$ と $y=x^2+2$ から y を消去すると

$$x^4=x^2+2 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2+1)(x^2-2)=0$$

交点の x 座標は　$x=\pm\sqrt{2}$

求める面積は，右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned}&2\int_0^{\sqrt{2}}\{(x^2+2)-x^4\}\,dx\\ =&2\left[\frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{56}{15}\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(2) $2n$ 枚の札を区別すると，$2n$ 枚の札から 1 枚ずつ 3 回取り出す順列の総数は

$${}_{2n}\mathrm{P}_3=2n(2n-1)(2n-2)=4n(n-1)(2n-1)$$

$X_1<X_2<X_3$ となる場合の総数は，それぞれの数に同じ札が 2 枚ずつあるから

$${}_n\mathrm{C}_3\cdot 2^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 8=\frac{4}{3}n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(2n-1)}=\boldsymbol{\frac{n-2}{3(2n-1)}} \quad (\text{通り})$$

補足 $2n$ 枚の札を区別すると，$X_1<X_2<X_3$，$X_1<X_3<X_2$，$X_2<X_1<X_3$，$X_2<X_3<X_1$，$X_3<X_1<X_2$，$X_3<X_2<X_1$ となる場合の総数は，すべて

$$\frac{4}{3}n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

$2n$ 枚の札を区別すると，$X_1=X_2$，$X_1=X_3$，$X_2=X_3$ となる場合の総数は，すべて

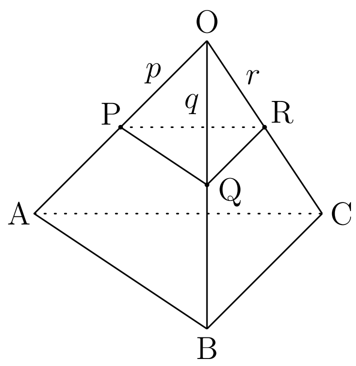
$$4n(n-1) \quad (\text{通り})$$

したがって

$$4n(n-1)(2n-1)=6\times\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)+3\times 4n(n-1)$$

■

2 $p=\mathrm{OP}$，$q=\mathrm{OQ}$，$r=\mathrm{OR}$ とおき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= p^2+q^2-2pq\cos 60^\circ \\ &= p^2+q^2-pq\end{aligned}$$

同様に，$\triangle\mathrm{OQR}$，$\triangle\mathrm{ORP}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2 &= q^2+r^2-qr, \\ \mathrm{RP}^2 &= r^2+p^2-rp\end{aligned}$$

$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$ であるから

$$p^2+q^2-pq=q^2+r^2-qr \quad \text{ゆえに} \quad (p-r)(p-q+r)=0 \quad \cdots①$$

また，$\mathrm{QR}=\mathrm{RP}$ であるから　$(q-p)(q-r+p)=0 \quad \cdots②$

① において，$r\neq p$ とすると，$q=p+r$ となり，これを ② に代入すると

$$(p+r-p)(p+r-r+p)=0 \quad \text{ゆえに} \quad pr=0$$

このとき，$p=0$ または $r=0$ となり，不適．したがって　$r=p$

$r=p$ を ② に代入すると　$q(q-p)=0$　すなわち　$p=q$

$p=q=r$ であるから　$\mathrm{OA}:\mathrm{OP}=\mathrm{OB}:\mathrm{OQ}=\mathrm{OC}:\mathrm{OR}$

よって，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行である．■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x+y=t$ とおくと，条件 $x^2+xy+y^2=6$ より

$$xy=(x+y)^2-(x^2+xy+y^2)=t^2-6$$

x，y を解とする λ に関する 2 次方程式は

$$\lambda^2-t\lambda+t^2-6=0$$

この方程式は，実数解をもつから，係数について

$$(-t)^2-4\cdot1\cdot(t^2-6)\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2-8\leqq 0$$

これを解いて　　$-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2\sqrt{2}$

したがって

$$\begin{aligned} x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y &= xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y) \\ &= (t^2-6)t-t^2+t \\ &= t^3-t^2-5t \end{aligned}$$

$f(t)=t^3-t^2-5t$ $(-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2\sqrt{2})$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-2t-5=(t+1)(3t-5)$$

t	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$\begin{aligned} f(-2\sqrt{2}) &= -8-6\sqrt{2}=-8-\sqrt{72}<-16 \\ f(-1) &= 3 \\ f\left(\frac{5}{3}\right) &= -\frac{175}{27}>-7 \\ f(2\sqrt{2}) &= -8+6\sqrt{2}=-8+\sqrt{72}<1 \end{aligned}$$

よって，求める値 $f(t)$ のとりうる値は　$\boldsymbol{-8-6\sqrt{2}\leqq f(t)\leqq 3}$　■

4 (p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る最小の内角は $\dfrac{180^\circ}{n}$

したがって，正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る内角は

$$\frac{180^\circ}{n}\times k \qquad (k\text{ は自然数})$$

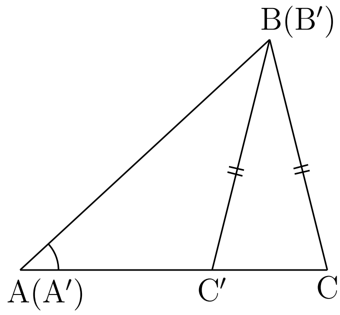
条件を満たすとき $\dfrac{180^\circ}{n}\times k = 60^\circ$ ゆえに $n = 3k$

上式から，n は 3 の倍数である．よって，本命題は**真**である．

(q) 右の図のように，$C \neq 90^\circ$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ について，直線 AC 上に $\mathrm{BC} = \mathrm{BC}'$ をみたす異なる 2 点 C，C′ がとれる．
このとき，$\mathrm{A}' = \mathrm{A}$，$\mathrm{B}' = \mathrm{B}$ とすると

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'},\quad \mathrm{BC} = \mathrm{B'C'},\quad \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'}$$

一方，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は合同ではない．
よって，本命題は**偽**である．



■

5 $\cos a\theta = \cos b\theta \cdots (*)$ は，$a = b$ のとき，$(*)$ を満たす θ が無数にあるので不適．

$(*)$ より
$$\sin\frac{a+b}{2}\theta\sin\frac{a-b}{2}\theta = 0$$

$a > 0$，$b > 0$，$a \neq b$ であるから，k，l を自然数とすると

$$\frac{a+b}{2}\theta = k\pi \quad\text{または}\quad \frac{|a-b|}{2}\theta = l\pi$$

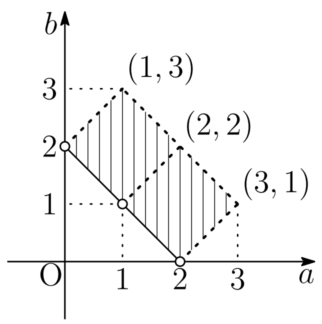
したがって
$$\theta = \frac{2k}{a+b}\pi \quad\text{または}\quad \theta = \frac{2l}{|a-b|}\pi$$

$(*)$ を満たす θ $(0 < \theta \leqq \pi)$ がちょうど 1 つであるから

$$\frac{2}{a+b}\pi \leqq \pi < \frac{4}{a+b}\pi,\quad \pi < \frac{2}{|a-b|}\pi$$

すなわち $\boldsymbol{0 < |a-b| < 2 \leqq a+b < 4}$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で，境界は実線を含み，点線および白丸は含まない．



■