

平成24年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分  
総合人間(文系), 文, 教育(文系), 法, 経済(文系)

問題 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

- (1) 2つの曲線  $y = x^4$  と  $y = x^2 + 2$  とによって囲まれる図形の面積を求めよ.
- (2)  $n$  を3以上の整数とする. 1から  $n$  までの番号をつけた  $n$  枚の札の組が2つある. これら  $2n$  枚の札をよく混ぜ合わせて, 札を1枚ずつ3回取り出し, 取り出した順にその番号を  $X_1, X_2, X_3$  とする.  $X_1 < X_2 < X_3$  となる確率を求めよ. ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする.

2 正四面体  $OABC$  において, 点  $P, Q, R$  をそれぞれ辺  $OA, OB, OC$  上にとる. ただし  $P, Q, R$  は四面体  $OABC$  の頂点とは異なるとする.  $\triangle PQR$  が正三角形ならば, 3辺  $PQ, QR, RP$  はそれぞれ3辺  $AB, BC, CA$  に平行であることを証明せよ.

3 実数  $x, y$  が条件  $x^2 + xy + y^2 = 6$  を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

4 次の命題  $(p), (q)$  のそれぞれについて, 正しいかどうかを答えよ. 正しい場合は証明し, 正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.

- (p) 正  $n$  角形の頂点から3点を選んで内角の1つが  $60^\circ$  である三角形を作ることができるならば,  $n$  は3の倍数である.
- (q)  $\triangle ABC$  と  $\triangle A'B'C'$  において,  $AB = A'B', BC = B'C', \angle A = \angle A'$  ならば, これらの2つの三角形は合同である.

5 次の条件(\*)を満たす正の実数の組  $(a, b)$  の範囲を求め, 座標平面上に図示せよ.

- (\*)  $\cos a\theta = \cos b\theta$  かつ  $0 < \theta \leq \pi$  となる  $\theta$  がちょうど1つある.

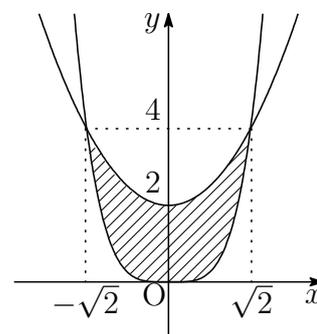
## 解答例

1 (1)  $y = x^4$  と  $y = x^2 + 2$  から  $y$  を消去すると

$$x^4 = x^2 + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2 + 1)(x^2 - 2) = 0$$

交点の  $x$  座標は  $x = \pm\sqrt{2}$

求める面積は、右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\sqrt{2}} \{(x^2 + 2) - x^4\} dx \\ &= 2 \left[ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{56}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

(2)  $2n$  枚の札を区別すると、 $2n$  枚の札から 1 枚ずつ 3 回取り出す順列の総数は

$${}_{2n}P_3 = 2n(2n-1)(2n-2) = 4n(n-1)(2n-1)$$

$X_1 < X_2 < X_3$  となる場合の総数は、それぞれの数に同じ札が 2 枚ずつあるから

$${}_n C_3 \cdot 2^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

よって、求める確率は

$$\frac{\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(2n-1)} = \frac{n-2}{3(2n-1)} \quad (\text{通り})$$

補足  $2n$  枚の札を区別すると、 $X_1 < X_2 < X_3$ ,  $X_1 < X_3 < X_2$ ,  $X_2 < X_1 < X_3$ ,  $X_2 < X_3 < X_1$ ,  $X_3 < X_1 < X_2$ ,  $X_3 < X_2 < X_1$  となる場合の総数は、すべて

$$\frac{4}{3}n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

$2n$  枚の札を区別すると、 $X_1 = X_2$ ,  $X_1 = X_3$ ,  $X_2 = X_3$  となる場合の総数は、すべて

$$4n(n-1) \quad (\text{通り})$$

したがって

$$4n(n-1)(2n-1) = 6 \times \frac{4}{3}n(n-1)(n-2) + 3 \times 4n(n-1)$$



- 2  $p = OP$ ,  $q = OQ$ ,  $r = OR$  とおき,  $\triangle OPQ$  に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= p^2 + q^2 - 2pq \cos 60^\circ \\ &= p^2 + q^2 - pq \end{aligned}$$

同様に,  $\triangle OQR$ ,  $\triangle ORP$  に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} QR^2 &= q^2 + r^2 - qr, \\ RP^2 &= r^2 + p^2 - rp \end{aligned}$$

$PQ = QR$  であるから

$$p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr \quad \text{ゆえに} \quad (p-r)(p-q+r) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

また,  $QR = RP$  であるから  $(q-p)(q-r+p) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

①において,  $r \neq p$  とすると,  $q = p+r$  となり, これを ② に代入すると

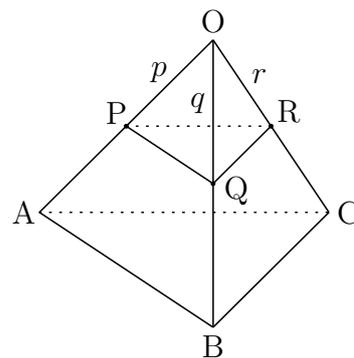
$$(p+r-p)(p+r-r+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad pr = 0$$

このとき,  $p=0$  または  $r=0$  となり, 不適. したがって  $r=p$

$r=p$  を ② に代入すると  $q(q-p) = 0$  すなわち  $p=q$

$p=q=r$  であるから  $OA : OP = OB : OQ = OC : OR$

よって, 3辺  $PQ$ ,  $QR$ ,  $RP$  はそれぞれ3辺  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  に平行である. ■



**3**  $x + y = t$  とおくと、条件  $x^2 + xy + y^2 = 6$  より

$$xy = (x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = t^2 - 6$$

$x, y$  を解とする  $\lambda$  に関する 2 次方程式は

$$\lambda^2 - t\lambda + t^2 - 6 = 0$$

この方程式は、実数解をもつから、係数について

$$(-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (t^2 - 6) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 8 \leq 0$$

これを解いて  $-2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$

したがって

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y &= xy(x + y) - (x + y)^2 + (x + y) \\ &= (t^2 - 6)t - t^2 + t \\ &= t^3 - t^2 - 5t \end{aligned}$$

$f(t) = t^3 - t^2 - 5t$  ( $-2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$ ) とおくと

$$f'(t) = 3t^2 - 2t - 5 = (t + 1)(3t - 5)$$

$t$	$-2\sqrt{2}$	$\dots$	$-1$	$\dots$	$\frac{5}{3}$	$\dots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$f(-2\sqrt{2}) = -8 - 6\sqrt{2} = -8 - \sqrt{72} < -16$$

$$f(-1) = 3$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{175}{27} > -7$$

$$f(2\sqrt{2}) = -8 + 6\sqrt{2} = -8 + \sqrt{72} < 1$$

よって、求める値  $f(t)$  のとりうる値は  $-8 - 6\sqrt{2} \leq f(t) \leq 3$  ■

- 4 (p) 正  $n$  角形の頂点から 3 点を選んで作る最小の内角は  $\frac{180^\circ}{n}$   
したがって、正  $n$  角形の頂点から 3 点を選んで作る内角は

$$\frac{180^\circ}{n} \times k \quad (k \text{ は自然数})$$

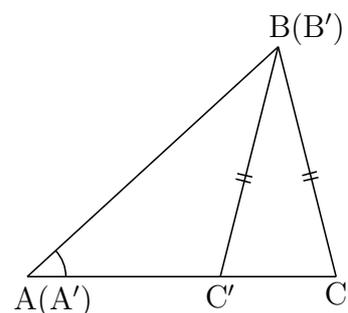
条件を満たすとき  $\frac{180^\circ}{n} \times k = 60^\circ$  ゆえに  $n = 3k$

上式から、 $n$  は 3 の倍数である。よって、本命題は真である。

- (q) 右の図のように、 $C \neq 90^\circ$  の  $\triangle ABC$  について、直線  $AC$  上に  $BC = BC'$  をみたす異なる 2 点  $C, C'$  がとれる。  
このとき、 $A' = A, B' = B$  とすると

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \angle A = \angle A'$$

一方、 $\triangle ABC$  と  $\triangle A'B'C'$  は合同ではない。  
よって、本命題は偽である。



- 5  $\cos a\theta = \cos b\theta \cdots (*)$  は、 $a = b$  のとき、 $(*)$  を満たす  $\theta$  が無数にあるので不適。

(\*) より 
$$\sin \frac{a+b}{2}\theta \sin \frac{a-b}{2}\theta = 0$$

$a > 0, b > 0, a \neq b$  であるから、 $k, l$  を自然数とすると

$$\frac{a+b}{2}\theta = k\pi \quad \text{または} \quad \frac{|a-b|}{2}\theta = l\pi$$

したがって 
$$\theta = \frac{2k}{a+b}\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{2l}{|a-b|}\pi$$

(\*) を満たす  $\theta$  ( $0 < \theta \leq \pi$ ) がちょうど 1 つであるから

$$\frac{2}{a+b}\pi \leq \pi < \frac{4}{a+b}\pi, \quad \pi < \frac{2}{|a-b|}\pi$$

すなわち  $0 < |a-b| < 2 \leq a+b < 4$

よって、求める領域は、右の図の斜線部分で、境界は実線を含み、点線および白丸は含まない。

