平成23年度　京都大学　２次試験前期日程(数学問題)120分
総合人間(文系)，文，教育(文系)，法，経済(文系)

1 次の各問に答えよ．

(1) 辺AB，辺BC，辺CAの長さがそれぞれ12，11，10の三角形ABCを考える．$\angle$Aの2等分線と辺BCの交点をDとするとき，線分ADの長さを求めよ．

(2) 箱の中に，1から9までの番号を1つずつ書いた9枚のカードが入っている．ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする．この箱から2枚のカードを同時に選び，小さいほうの数をXとする．これらのカードを箱に戻して，再び2枚のカードを同時に選び，小さいほうの数をYとする．$X=Y$である確率を求めよ．

2 四面体OABCにおいて，点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線とその平面の交点をHとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$を求めよ．

3 実数aが変化するとき，3次関数$y=x^3-4x^2+6x$と直線$y=x+a$のグラフの交点の個数はどのように変化するか．aの値によって分類せよ．

4 xy平面上で，連立不等式

$$\begin{cases} |x| \leqq 2, \\ y \geqq x, \\ y \leqq \left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2 \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ．

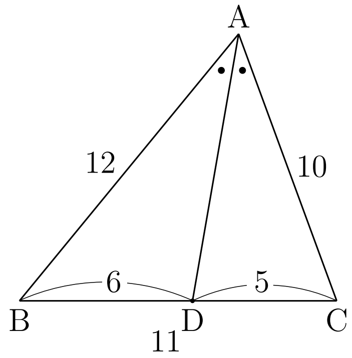
5 0以上の整数を10進法で表すとき，次の問いに答えよ．ただし，0は0桁の数と考えることにする．またnは正の整数とする．

(1) 各桁の数が1または2であるn桁の整数を考える．それらすべての整数の総和をT_nとする．T_nをnを用いて表せ．

(2) 各桁の数が0，1，2のいずれかであるn桁以下の整数を考える．それらすべての整数の総和をS_nとする．S_nがT_nの15倍以上になるのは，nがいくつ以上のときか．必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$および$0.477<\log_{10}3<0.478$を用いてもよい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると



$$\cos B = \frac{12^2 + 11^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{5}{8}$$

AD は $\angle$A の 2 等分線であるから

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 6 : 5$$

ゆえに　$\mathrm{BD} = \dfrac{6}{6+5}\mathrm{BC} = \dfrac{6}{11} \cdot 11 = 6$

$\triangle$ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BD} \cos B \\ &= 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{5}{8} = 90\end{aligned}$$

$\mathrm{AD} > 0$ であるから　　$\mathbf{AD = 3\sqrt{10}}$

補足 $\mathbf{AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD}$

(2) $1 \leqq k \leqq 8$ とすると　$P(X \geqq k) = \dfrac{{}_{9-k+1}\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \dfrac{{}_{10-k}\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \dfrac{(10-k)(9-k)}{72}$

$$\begin{aligned}P(X = k) &= P(X \geqq k) - P(X \geqq k+1) \\ &= \frac{(10-k)(9-k)}{72} - \frac{(9-k)(8-k)}{72} = \frac{9-k}{36}\end{aligned}$$

したがって，$X = Y$ である確率は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8} \left(\frac{9-k}{36}\right)^2 &= \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^{8} (9-k)^2 = \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^{8} k^2 \\ &= \frac{1}{36^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 = \mathbf{\frac{17}{108}}\end{aligned}$$

別解 9 枚のカードから 2 枚を同時に選ぶ総数は　${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ (通り)

小さいほうの数を k とすると $(1 \leqq k \leqq 8)$，大きいほうの数は $k+1$ から 9 までの $9-k$ 通りあるから

$$P(X = k) = \frac{9-k}{36}$$

■

2 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$ より　$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=|\vec{c}|=3$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$ より，$|\vec{b}-\vec{a}|^2=7$ であるから　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=7$

ゆえに　$3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=7$　すなわち　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=3$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ とおくと　$x+y+z=1 \quad \cdots①$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\\&=(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2)x+(|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b})y+(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})z\\&=-x+6y-3z=0 \quad \cdots②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\\&=(\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2)x+(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})y+(|\vec{c}|^2-\vec{c}\cdot\vec{a})z\\&=-x-3y+6z=0 \quad \cdots③\end{aligned}$$

①，②，③ を解いて　$x=\dfrac{3}{5},\ y=z=\dfrac{1}{5}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$\begin{aligned}|3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2&=9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+6\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=9\cdot2^2+3^2+3^2+6\cdot3+2\cdot0+6\cdot3=90\end{aligned}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{5}|3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\dfrac{1}{5}\sqrt{90}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}$

別解 O を通り，平面 OBC に垂直な直線を ℓ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\ell$ となす角をそれぞれ α，β，γ とすると，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ であるから

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|}=\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

四面体 OABC の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{OA}|\cos\gamma|=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=7$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=7$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=-2$$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{7\cdot7-(-2)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ より　$\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$　よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ 求める交点の個数は，3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 5x$ と直線 $y = a$ のグラフの交点の個数に一致する．$y = x^3 - 4x^2 + 5x$ を微分すると

$$y = 3x^2 - 8x + 5 = (x - 1)(3x - 5)$$

この関数の増減表は，次のようになる．

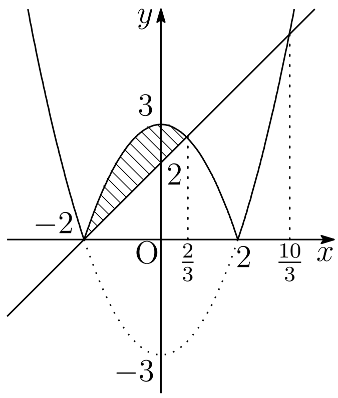
x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

よって，求める共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < \dfrac{50}{27},\ 2 < a} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a = \dfrac{50}{27},\ 2} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\dfrac{50}{27} < a < 2} \textbf{ のとき} & \textbf{3 個} \end{cases}$$

■

$\boxed{4}$ 求める領域の面積は，領域



$$(*)\begin{cases}|x| \leqq 2, \\ y \geqq x+2, \\ y \leqq \left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|\end{cases}$$

の面積に等しい．$(*)$ の第 1 式から　$-2 \leqq x \leqq 2$

このとき，$\dfrac{3}{4}x^2-3=\dfrac{3}{4}(x^2-4) \leqq 0$ であるから

$$y \leqq \left|\frac{3}{4}x^2-3\right| = -\frac{3}{4}x^2+3$$

$y=-\dfrac{3}{4}x^2+3$ と $y=x+2$ の交点の x 座標は

$$-\frac{3}{4}x^2+3=x+2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(3x-2)=0$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ に注意してこれを解くと　$x=-2,\ \dfrac{2}{3}$

したがって，図の斜線部分が求める面積で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left\{-\frac{3}{4}x^2+3-(x+2)\right\} dx \\ &= -\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{2}{3}} (x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right) dx \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}+2\right)^3 = \mathbf{\frac{64}{27}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 各桁の数が1または2であるn桁の整数の個数は　2^n

したがって，各桁の数の和は　$2^n \cdot \dfrac{1+2}{2} = 3 \cdot 2^{n-1}$

よって

$$\begin{aligned} T_n &= 3 \cdot 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} 10^{k-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} \\ &= \boldsymbol{\frac{2^{n-1}(10^n - 1)}{3}} \end{aligned}$$

(2) 各桁の数が0，1，2であるn桁以下の整数の個数は　3^n

したがって，各桁の数の和は　$3^n \cdot \dfrac{0+1+2}{3} = 3^n$

よって

$$\begin{aligned} S_n &= 3^n \sum_{k=1}^{n} 10^{k-1} = 3^n \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} \\ &= \boldsymbol{3^{n-2}(10^n - 1)} \end{aligned}$$

これと(1)の結果により　$\dfrac{S_n}{T_n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

S_nがT_nの15倍以上となるとき　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \geqq 15$

両辺の常用対数をとると　$(n-1)\log_{10}\dfrac{3}{2} \geqq 1 + \log_{10}\dfrac{3}{2}$　$\cdots$①

$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$，$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ であるから

$\log_{10}\dfrac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$ より

$\dfrac{1}{6} < 0.175 < \log_{10}\dfrac{3}{2} < 0.177 < \dfrac{1}{5}$　ゆえに　$5 < \dfrac{1}{\log_{10}\frac{3}{2}} < 6$　$\cdots$②

①より　$n - 1 \geqq \dfrac{1}{\log_{10}\frac{3}{2}} + 1$　ゆえに　$n \geqq \dfrac{1}{\log_{10}\frac{3}{2}} + 2$

②より，上式を満たすのはnが**8**以上のときである．■